3. Магнитное поле

В повседневной практике мы сталкиваемся с магнитной силой, когда имеем дело с постоянными магнитами, электромагнитами, катушками индуктивности, электромоторами, реле, отклоняющими системами кинескопов.

В основе магнитных явлений лежат два экспериментальных факта, установленных в 19 веке:

1) Магнитное поле создается движущимися зарядами.
2) Магнитное поле действует на движущиеся заряды.

Демонстрации

1. Ток действует на магнитную стрелку
2. Взаимодействие прямых токов: токи одного направления притягиваются, противоположных направлений отталкиваются
3. Магнитное поле действует на движущиеся заряды (ЭЛТ)

Компьютерные демонстрации

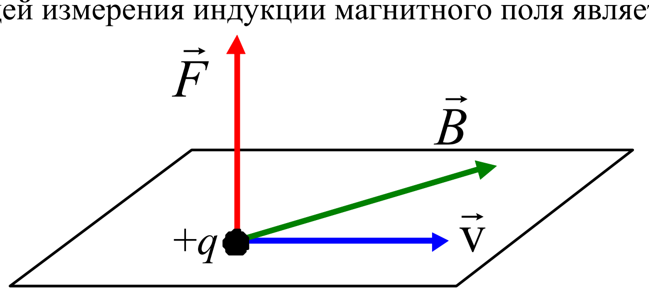
4. Станок Ампера
5. Автоколебательная система
6. Проводник в поле катушки
7. Взаимодействие витков с током
8. Электрический ток в газах
9. Ток в электролите
10. Ток в проводнике

3.1.Силы, действующие в магнитном поле на движущиеся заряды и токи

Закон, определяющий силу, действующую в магнитном поле $\vec{B}$ на движущийся заряд q , имеет вид

$$\vec{F} = q[\vec{\upsilon}\vec{B}] \tag{1}$$

Здесь $\vec{\upsilon}$ - скорость заряда q, вектор $\vec{B}$ называется вектором индукции магнитного поля. Этот вектор характеризует магнитное поле в данной точке пространства. Соотношение (1) является по существу определением $\vec{B}$. Опыт показывает, что вектор $\vec{B}$ не зависит от q и $\vec{\upsilon}$. В системе СИ единицей измерения индукции магнитного поля является тесла (Тл).



Если кроме магнитного поля существует и электрическое, то сила, действующая на движущийся заряд q, равна

$$\boxed{\vec{F} = q[\vec{\upsilon}\vec{B}] + q\vec{E}} \tag{2}$$

Эту силу называют силой Лоренца.

Опыты по действию магнитного поля на движущиеся заряды удобно проводить не с отдельными зарядами, а с токами. Пусть ток I течет по тонкому проводу с площадью поперечного сечения *S*. Вычислим силу, действующую со стороны магнитного поля на бесконечно короткий участок провода длины dl. Тогда

$$d\vec{F} = dNq[\vec{\upsilon}, \vec{B}] = ndlSq[\vec{\upsilon}, \vec{B}] = [ndlSq\vec{\upsilon}, \vec{B}],$$

где n - концентрация носителей заряда в проводнике. Заметим, что $\vec{j} = qn\vec{\upsilon}$, и, следовательно

$$qn\vec{\upsilon}Sdl = \vec{j}Sdl = Id\vec{l},$$

где вектор $d\vec{l}$ совпадает с направлением тока. Тогда

$$\boxed{d\vec{F} = I[d\vec{l}, \vec{B}]}\,. \tag{3}$$

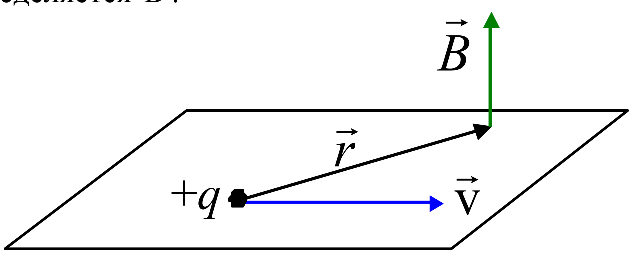
Эта формула была установлена Ампером и носит название закона Ампера (сила Ампера).

3.2.Магнитное поле равномерно движущегося заряда

Магнитное поле создается движущимися зарядами. На основе обобщения экспериментальных данных был получен закон, определяющий поле $\vec{B}$ точечного заряда *q*, движущегося с постоянной нерелятивистской скоростью ($v << c$):

$$\boxed{\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{q[\vec{\upsilon}\vec{r}]}{r^3}}, \tag{4}$$

где $\mu_0 = 4\pi\, 10^{-7}$ Гн/м - магнитная постоянная, $\vec{r}$ - радиус-вектор, проведенный от заряда *q* к точке, в которой определяется $\vec{B}$.



Пример. *<u>Сравнение сил магнитного и электрического взаимодействий движущихся зарядов.</u>* Пусть два точечных заряда *q* в некоторый момент времени движутся параллельно друг другу с одинаковыми нерелятивистскими скоростями v, как показано на рис.1. Найдем отношение магнитной $F_м$ и электрической $F_э$ сил, действующих со стороны заряда 1 на заряд 2.

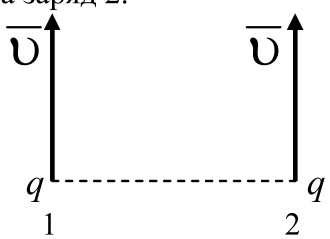


Рис.1.

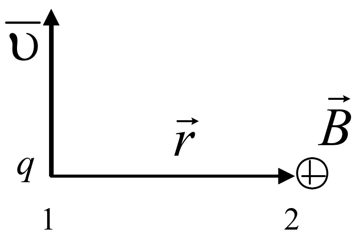


Рис.2.

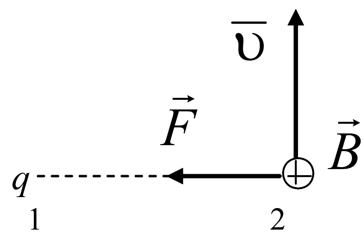


Рис.3.

Согласно (4) заряд 1 создает в точке 2 магнитное поле

$$B=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{q\upsilon r\sin 90^0}{r^3}=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{q\upsilon}{r^2},$$

направленное в плоскость чертежа (рис.2). Это магнитное поле действует на заряд 2 согласно (1) с силой

$$F_м=q\upsilon B\sin 90^0=q\upsilon\frac{\mu_0 q\upsilon}{4\pi r^2}=\frac{\mu_0(q\upsilon)^2}{4\pi r^2}.$$

Видно, что в данном случае магнитная сила является силой притяжения зарядов (рис.3).

Сила электрического взаимодействия

$$F_э=qE=q\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}.$$

Следовательно,

$$\frac{F_м}{F_э}=\mu_0\varepsilon_0\upsilon^2.$$

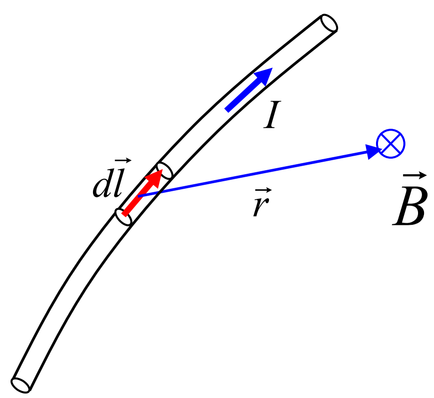
Величина $c=\dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}}$ равна скорости света в вакууме. Поэтому

$$\frac{F_м}{F_э}=\left(\frac{\upsilon}{c}\right)^2.$$

При относительно малых скоростях, магнитная сила существенно меньше электрической. Например, при движении электронов вдоль проводов скорость направленного движения обычно составляет несколько десятых долей миллиметра в секунду. Тогда отношение $(\vec{\upsilon}/c)^2\approx 10^{-24}$. Однако, в данном случае электрические силы практически отсутствуют в результате почти идеального баланса отрицательных и положительных зарядов в проводах (провод с током электронейтральный!). Поэтому очень малая магнитная сила является, по существу, единственной. А участие огромного числа электронов в движении многократно увеличивает магнитную силу.

3.3. Закон Био и Савара.

Опыт показывает, что для магнитного поля, как и для электрического, справедлив принцип суперпозиции. Пусть ток I течет по тонкому проводу с площадью поперечного сечения S. Найдем магнитное поле, которое создает бесконечно малый участок провода dl с током I в точке, определяемой вектором $\vec{r}$ (рис.). Направление вектора $d\vec{l}$ совпадает с направлением тока.



Магнитное поле создается в точке наблюдения электронами, которые движутся в элементе dl. Следовательно,

$$d\vec{B}=nSdl\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{q[\vec{\upsilon},\vec{r}]}{r^3}.$$

Но $nSdlq\vec{\upsilon}=\vec{j}Sdl=Id\vec{l}$. Поэтому

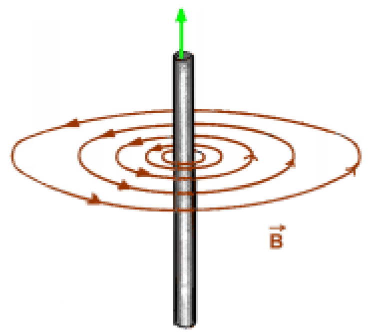
$$\boxed{d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I[d\vec{l},\vec{r}]}{r^3}}. \qquad (5)$$

Эта формула выражает закон Био-Савара.
Пример 1. Магнитное поле на оси кругового тока (Иродов, стр. 160).
Пример 2. Магнитное поле прямого тока (Иродов, стр.159)

3.4. Основные законы магнитного поля

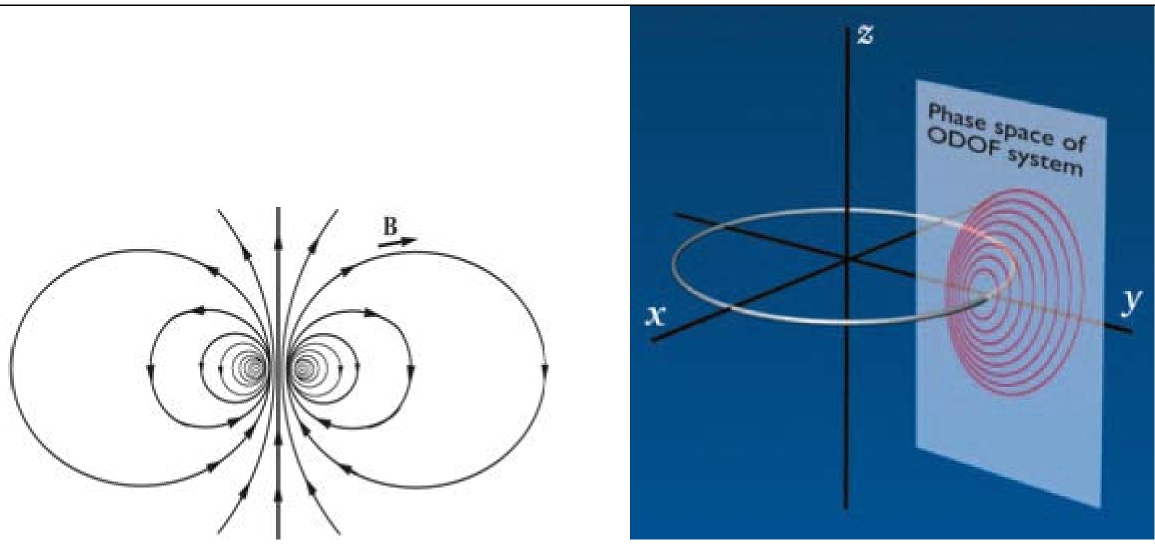
Магнитные поля, также как и электрические, можно изображать графически при помощи *линий индукции магнитного поля*. Линиями индукции (или линиями вектора $\vec{B}$) называют линии, касательные к которым направлены так же, как и вектор $\vec{B}$ в данной точке поля. Через каждую точку магнитного поля можно провести линию индукции.

Рассмотрим линии индукции поля прямого тока. Линии индукции в данном случае концентрические окружности, центры которых расположены на оси тока.



Магнитные линии прямого проводника с током

На следующем рисунке приведены магнитные линии кругового витка с током.



Магнитные линии кругового витка с током

Теорема Гаусса для вектора $\vec{B}$. Поток вектора $\vec{B}$ через произвольную замкнутую поверхность равен нулю:

$$\boxed{\oint_S \vec{B}d\vec{s} = 0}. \tag{6}$$

Эта теорема является обобщением опытных фактов и выражает тот факт, что в природе нет магнитных зарядов, на которых начинались бы или заканчивались линии вектора $\vec{B}$.

Линии индукции магнитного поля могут быть замкнутыми в отличие от линий напряженности электрического поля, которые начинаются и заканчиваются на электрических зарядах. Но магнитные линии <u>не обязательно</u> замкнуты, как это утверждается в некоторых учебниках.

Теорема о циркуляции вектора $\vec{B}$. Для электрического поля в силу его потенциальности циркуляция вектора $\vec{E}$ по произвольному замкнутому контуру равна нулю. Вычислим аналогичную величину

$$\Gamma = \oint_L \vec{B}d\vec{l}$$

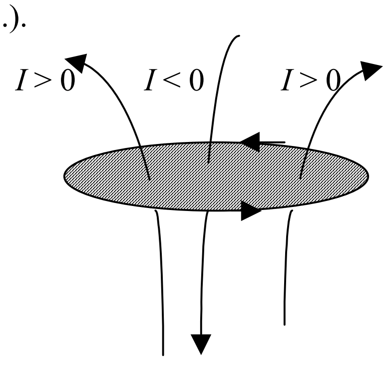
для магнитного поля. Рассмотрим сначала поле длинного прямого тока, а в качестве замкнутого контура выберем окружность радиуса *r*, центр которой совпадает с осью тока. В этом случае $\left|\vec{B}\right| = \dfrac{\mu_0 I}{2\pi r}$ во всех точках контура, угол между векторами $\vec{B}$ и $d\vec{l}$ равен нулю, поэтому

$$\oint_L \vec{B}d\vec{l} = B2\pi r = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}2\pi r = \mu_0 I$$

Этот результат не зависит от *r* и справедлив для окружности любого радиуса. Исходя из закона Био-Савара, можно доказать, что полученный результат справедлив и для произвольного замкнутого контура, охватывающего ток *I*, не обязательно протекающий по прямому проводу. Это составляет содержание **теоремы о циркуляции вектора $\vec{B}$.**
<u>Циркуляция вектора $\vec{B}$ по произвольному замкнутому контуру</u> *L* равна произведению μ_0 на алгебраическую сумму токов, охватываемых контуром *L*:

$$\boxed{\oint_L \vec{B}d\vec{l} = \mu_0 I}. \tag{7}$$

Ток считается положительным, если его направление связано с направлением обхода контура правилом правого винта (рис.).



Пример 1. Магнитное поле внутри и вне прямого проводника с током.
Пример 2. Магнитное поле тороидальной катушки.
Пример 3. Магнитное поле длинного соленоида.

3.5. Основные законы магнитного поля в дифференциальной форме

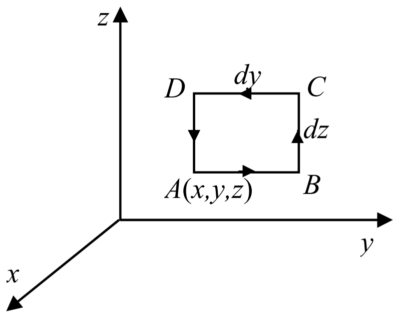
1. Пользуясь теоремой Остроградского-Гаусса

$$\oint_S \vec{B}d\vec{S} = \int_V div\vec{B}dV ,$$

теорему Гаусса для вектора $\vec{B}$ можно также записать в дифференциальном виде:

$$\boxed{\mathrm{div}\vec{B} = 0} \qquad (8)$$

2. Теорему о циркуляции можно также записать в дифференциальной форме. С этой целью применим теорему о циркуляции к бесконечно малому прямоугольному контуру *ABCD* со сторонами *dy* и *dz*, плоскость которого перпендикулярна оси *x*.



Вклад в циркуляцию, вносимый стороной *AB*, равен $B_y(x, y, z)dy$. Противоположная сторона *CD* вносит в циркуляцию слагаемое $-B_y(x, y, z+dz)dy$. Сумма этих величин равна

$$-B_y(x, y, z+dz)dy + B_y(x, y, z)dy = -\frac{\partial B_y}{\partial z}dydz = -\frac{\partial B_y}{\partial z}dS ,$$

где dS - площадь прямоугольника *ABCD*. Аналогично стороны *BC* и *DA* вносят в циркуляцию слагаемое $+\frac{\partial B_z}{\partial y}dS$. Полная циркуляция будет

$$\oint_L \vec{B}d\vec{l} = \left(\frac{\partial B_z}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial z}\right)dS .$$

По теореме о циркуляции та же величина равна $\mu_0 j_x dS$, так как $j_x dS$ есть полный ток, пронизывающий контур. Приравнивая оба выражения, получим

$$\frac{\partial B_z}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial z} = \mu_0 j_x .$$

Аналогично,

$$\frac{\partial B_x}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial x} = \mu_0 j_y ,$$

$$\frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial y} = \mu_0 j_z .$$

Обозначим

$$\mathrm{rot}\vec{B} = \left(\frac{\partial B_z}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial z}\right)\vec{e}_x + \left(\frac{\partial B_x}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial x}\right)\vec{e}_y + \left(\frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial y}\right)\vec{e}_z .$$

Тогда

$$\boxed{\mathrm{rot}\vec{B} = \mu_0 \vec{j}}. \qquad (9)$$

<u>Замечание 1.</u> Формально $\mathrm{rot}\vec{B}$ можно рассматривать как векторное произведение

$$\mathrm{rot}\vec{B} = [\vec{\nabla}\vec{B}] = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}$$

дифференциального оператора «набла»

$$\nabla = \vec{e}_x \frac{\partial}{\partial x} + \vec{e}_y \frac{\partial}{\partial y} + \vec{e}_z \frac{\partial}{\partial z}$$

на вектор $\vec{B}$. Напомним, что дивергенция равна скалярному произведению $\mathrm{div}\vec{B} = \vec{\nabla}\vec{B}$

<u>Замечание 2.</u> Выше мы доказали что для произвольного векторного поля справедливо утверждение:

$$\text{если } \oint_L \vec{B}d\vec{l} = \int_S \mu_0 \vec{j} d\vec{s}, \qquad \text{то } \mathrm{rot}\vec{B} = \mu_0 \vec{j} .$$

Отсюда следует теорема Стокса:

$$\oint_L \vec{B}d\vec{l} = \int_S \mathrm{rot}\vec{B}d\vec{s} ,$$

где $\vec{B}(\vec{r})$ - произвольное векторное поле, L - произвольный замкнутый контур, S - произвольная поверхность ограниченная контуром L. Это и есть математическая теорема Стокса.

<u>Замечание 3</u>. Пользуясь теоремой Стокса, условие потенциальности электростатического поля $\oint_L \vec{E}d\vec{l} = 0$ можно записать в виде:

$$\oint_L \vec{E}d\vec{l} = \int_S \mathrm{rot}\vec{E}d\vec{s} = 0 .$$

Следовательно, $\mathrm{rot}\vec{E} = 0$.

Таким образом, основные уравнения магнитного поля постоянных токов в вакууме могут быть записаны в виде

$$\boxed{\mathrm{div}\vec{B} = 0, \qquad \mathrm{rot}\vec{B} = \mu_0 \vec{j} .}$$

Сравним их с основными уравнениями электростатического поля в вакууме:

$$\boxed{\mathrm{div}\vec{E} = \rho / \varepsilon_0, \qquad \mathrm{rot}\vec{E} = 0 .}$$

Из этих уравнений видно, что электростатическое поле потенциальное, его источниками являются неподвижные электрические заряды. Магнитное поле, напротив, не потенциальное, его источниками служат электрические токи.