1.6. Потенциальность электростатического поля

Пусть в однородном электрическом поле $\vec{E}$ перемещается точечный заряд q из точки 1 в точку 2 (рис. 1). При перемещении заряда q по прямой 1-2 работа сил электрического поля равна

$$A_{12} = \left|\vec{F}\right| l \cos\alpha = q\left|\vec{E}\right| l \cos\alpha = qEd\,.$$

Если же заряд перемещается из точки 1 в 2 по ломанной траектории 1-3-2, то работа сил поля

$$A_{132} = A_{13} + A_{32} = \left|\vec{F}\right| d\cos 0^0 + \left|\vec{F}\right| h\cos 90^0 = \left|\vec{F}\right| d = qEd\,.$$

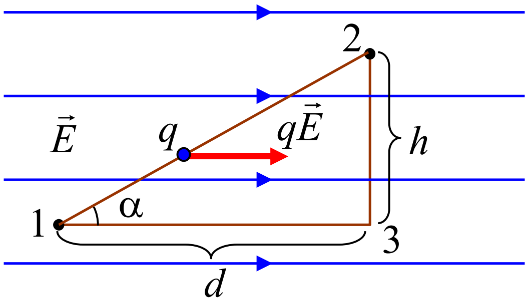


Рис.1.

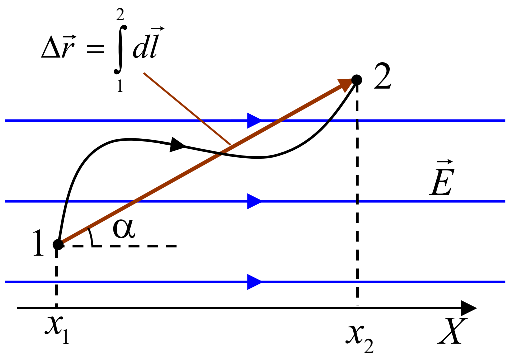


Рис.2.

Если заряд q перемещается из точки 1 в точку 2 по произвольной траектории, то криволинейную траекторию всегда можно представить в виде ломанной. Нетрудно понять, что и в этом случае работа сил поля независимо от формы траектории будет определяться формулой

$$A_{12} = qEd\,,$$

где d - расстояние между точками, измеренное вдоль линий поля $\vec{E}$ (силовых линий). Действительно, в этом случае:

$$A_{12} = q\int_{(1)}^{(2)} \vec{E}d\vec{l} = q\vec{E}\int_{(1)}^{(2)} d\vec{l} = q\vec{E}\Delta\vec{r} = qE\Delta r\cos\alpha = qE(x_2 - x_1)\,,$$

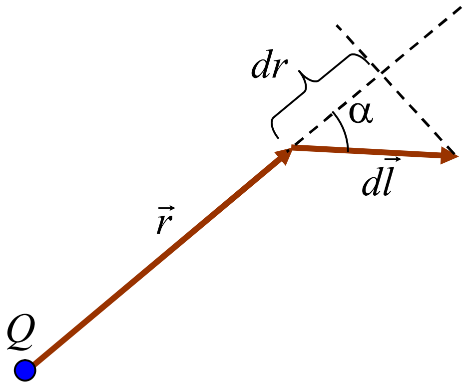
где x_2 и x_1 – координаты конечной и начальной точек на оси X, направленной вдоль вектора напряженности (рис.2).

Таким образом, работа сил однородного электрического поля при перемещении точечного заряда из точки 1 в точку 2 не зависит от формы траектории, а определяется только положениями начальной и конечной точек. Мы знаем, что *силы, обладающие таким свойством, называются консервативными или потенциальными.*

Пусть теперь поле $\vec{E}$ создается неподвижным точечным зарядом Q. Найдем работу сил этого поля при перемещении точечного заряда q из точки 1 в точку 2 по произвольной траектории. Положение этих точек определяется векторами $\vec{r}_1$ и $\vec{r}_2$. Необходимо просуммировать работы, совершаемые силами поля на всех элементарных (бесконечно малых) перемещениях $\Delta\vec{r}_i$:

$$A_{12} = \sum_i F_i \Delta l_i \cos\alpha_i = \int_{(1)}^{(2)} \vec{F}d\vec{l} = \int_{(1)}^{(2)} \frac{kqQ}{r^3}\vec{r}d\vec{l}\,,$$

где $k = 1/4\pi\varepsilon_0$.



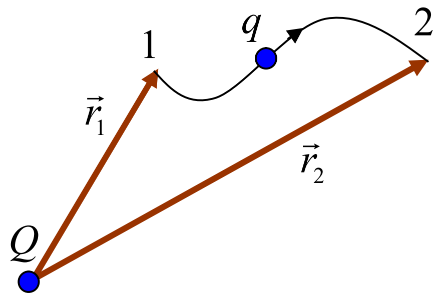


Рис.3. Рис.4.

Из рис. 3 видно, что

$$\vec{r}d\vec{r} = |\vec{r}||d\vec{l}|\cos\alpha = |\vec{r}|dr = rdr,$$

где dr - приращение расстояния до заряда Q. Поэтому

$$A_{12} = \int_{r_1}^{r_2} \frac{kqQ}{r^2} dr = kqQ\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right) \qquad (1)$$

где $r_1 = |\,\vec{r}_1\,|$, $r_2 = |\,\vec{r}_2\,|$ (рис.4).

Таким образом, при любом выборе начальной и конечной точек 1 и 2 работа A_{12} не зависит от формы траектории, а определяется только положениями этих точек. Следовательно, электростатическое поле точечного заряда является полем консервативным (потенциальным).

Доказанное свойство справедливо для электрического поля любой системы неподвижных точечных зарядов. Это непосредственно следует из принципа суперпозиции и легко доказываемого утверждения о том, что работа результирующей силы равна сумме работ составляющих сил.

В общем случае любую систему зарядов можно мысленно разделить на достаточно малые части, каждая из которых может рассматриваться как точечный заряд. *Поэтому всякое электростатическое поле является полем потенциальным.*

Допустим, что в электростатическом поле заряд переносится из точки 1 в точку 2 сначала по пути 1-3-2, а затем по пути 1-4-2 (рис.5). В обоих случаях работы сил поля одинаковы $A_{132} = A_{142}$. Если заряд переносится по замкнутой траектории 1-3-2-4-1, то на участке 2-4-1 работа изменит знак: $A_{241} = A_{142}$. Поэтому

$$A_{13241} = A_{132} + A_{241} = A_{132} - A_{142} = 0.$$

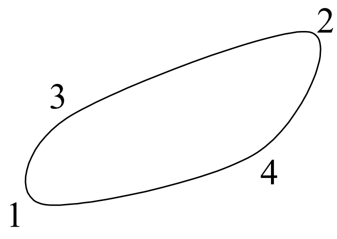


Рис.5.

Следовательно, при перемещении заряда по любому замкнутому пути работа в электростатическом поле равна нулю. Это свойство можно выразить криволинейным интегралом по замкнутой траектории:

$$\oint \vec{F} d\vec{l} = \oint q\vec{E} d\vec{l} = q\oint \vec{E} d\vec{l} = 0 .$$

Таким образом, для любого замкнутого контура

$$\oint \vec{E} d\vec{l} = 0 . \qquad (2)$$

Такой интеграл называют циркуляцией вектора $\vec{E}$ по соответствующему замкнутому контуру. Уравнение (2) приводит к другому определению потенциальности поля, эквивалентному данному выше.

Векторное поле $\vec{E}$ *называется потенциальным, если циркуляция вектора* $\vec{E}$ *по любому замкнутому контуру равна нулю.* Уравнение (2) является вторым фундаментальным уравнением электростатики.

Из уравнения (2) следует, что силовые линии электростатического поля не могут быть замкнутыми. Для доказательства предположим противное. Пусть силовая линия замкнута. Возьмем ее в качестве контура интегрирования. При обходе этого контура в положительном направлении силовой линии подынтегральное выражение в интеграле $\oint \vec{E} d\vec{l}$, а с ним и сам интеграл существенно положительны. Это противоречит уравнению (2), что и доказывает наше утверждение.

1.7. Электрический потенциал

Для потенциальных полей можно ввести понятие разности потенциалов.

Разностью потенциалов $\varphi_1 - \varphi_2$ *в точках 1 и 2 называется отношение работы сил поля по перемещению пробного заряда из точки 1 в точку 2 к величине этого заряда:*

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \frac{A_{12}}{q} . \qquad (3)$$

Такое определение разности потенциалов имеет смысл потому, что работа не зависит от формы траектории, а определяется только положениями начальной и конечной точек этой траектории.

Если известна напряженность поля $\vec{E}$, то разность потенциалов определяется интегрированием

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \frac{A_{12}}{q} = \frac{1}{q} \int_{1-2} q\vec{E} d\vec{l} = \int_{1-2} \vec{E} d\vec{l} .$$

Потенциалу какой-либо произвольной точки, положение которой определяется радиус-вктором $\vec{r}_0$, можно условно приписать любое значение φ_0. Тогда потенциалы $\varphi(r)$ всех прочих точек определятся однозначно:

$$\varphi(\vec{r}) = \varphi_0 + \frac{1}{q} A_{\vec{r} \to \vec{r}_0} = \varphi_0 + \int_{\vec{r}}^{\vec{r}_0} \vec{E} d\vec{l} . \qquad (4)$$

Если изменить значение φ_0 , то потенциалы во всех точках поля изменятся на одну и ту же постоянную, но разность потенциалов между двумя любыми точками останется неизменной. Таким образом, потенциал определен с точностью до произвольной аддитивной постоянной.

Во многих случаях за нулевой потенциал удобно принимать потенциал в бесконечно удаленной точке: $\varphi_0 = \varphi(\vec{r}_0) = 0$, $\vec{r}_0 \to \infty$

В этом случае потенциал равен работе сил поля по переносу единичного положительного заряда из данной точки в бесконечность:

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{q} A_{\vec{r}\to\infty} = \int_{\vec{r}}^{\infty} \vec{E} d\vec{l} \ .$$

В системе СИ единицей потенциала является вольт (обозначается В):

1 В = 1 Дж / 1 Кл.

Найдем потенциал поля точечного заряда *Q* в вакууме, считая потенциал в бесконечно удаленной точке равным нулю. По определению потенциала

$$\varphi(r) = \frac{1}{q} A_{r\to\infty} \ .$$

Формулу для работы мы получили ранее:

$$A_{r\to\infty} = \frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{\infty}\right).$$

Отсюда

$$\varphi(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r} = \frac{kQ}{r} \ . \qquad (5)$$

Принцип суперпозиции для потенциала. Если электрическое поле в некоторой точке создается несколькими точечными зарядами Q_i, то на основании принципа суперпозиции

$$\varphi(r) = \sum_i \frac{kQ_i}{r_i} \ ,$$

где r_i - расстояние i-ого заряда до точки наблюдения.

Связь потенциала с напряженностью электрического поля. Рассмотрим сначала однородное электрическое поле $\vec{E}$. Пусть точки 1 и 2 лежат на оси x и имеют координаты x_1 и x_2. Тогда при любой ориентации оси x по отношению к силовым линиям поля $\vec{E}$ для разности потенциалов в точках 1 и 2 можно записать

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_{1-2} \vec{E} d\vec{l} = \vec{E} \int_{1-2} d\vec{l} = \vec{E}\Delta\vec{l} = E\Delta l \cos\alpha \ .$$

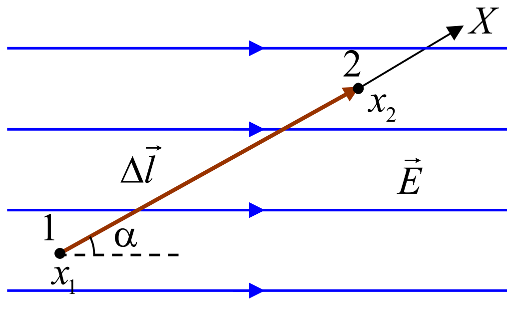


Рис.6.

Учитывая, что $E\cos\alpha = E_x$, получим

$$\varphi_1 - \varphi_2 = E_x \Delta l = E_x(x_2 - x_1).$$

Но

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \varphi(x_1) - \varphi(x_2) = -\Delta\varphi,$$

поэтому

$$E_x = -\frac{\Delta\varphi}{\Delta x}, \tag{6}$$

где $\Delta\varphi$ - приращение потенциала, а Δx - приращение координаты.

Если электрическое поле $\vec{E}$ неоднородное, то можно рассмотреть бесконечно близкие точки 1 и 2. Формула (6) тогда будет записана для бесконечно малых приращений потенциала $\Delta\varphi$ и координаты Δx. Такое отношение называют частной производной функции трех переменных $\varphi(x, y, z)$ по переменной x (обозначают $\partial\varphi / \partial x$). Аналогичным образом можно получить формулы для проекций вектора $\vec{E}$ и на остальные координатные оси декартовой системы координат:

$$E_x = -\frac{\partial\varphi}{\partial x},\ E_y = -\frac{\partial\varphi}{\partial y},\ E_z = -\frac{\partial\varphi}{\partial z}.$$

Эти соотношения можно объединить в одну векторную формулу

$$\vec{E} = -\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\vec{k}\right). \tag{7}$$

Выражение, стоящее в скобках, называется градиентом скалярной величины φ и обозначается grad φ. Таким образом, формулу (7) можно записать короче

$$\vec{E} = -grad\,\varphi. \tag{7а}$$

Из формулы (7) следует, что напряженность поля имеет размерность потенциала, деленного на длину (в системе СИ - В/м).

<u>Подведем некоторые итоги.</u>

1. Соотношение $A_{12} = q(\varphi_1 - \varphi_2)$ является определением разности потенциалов. Из него следует

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \frac{A_{12}}{q} = \frac{1}{q}\int\limits_{1-2} q\vec{E}d\vec{l} = \int\limits_{1-2} \vec{E}d\vec{l}.$$

Разность потенциалов можно рассчитать по этой формуле, если известна напряженность поля во всех точках некоторой траектории, соединяющей точки 1 и 2.

> **Пример 1.** Разность потенциалов между точками 1 и 2, расположенными по разные стороны равномерно заряженной плоскости на расстояниях a и b от нее.

2. Если принять потенциал бесконечно удаленной точки равной нулю, то приведенная выше формула позволяет рассчитать потенциал произвольной точки, если известна напряженность поля во всех точках произвольной траектории, которая "соединяет" данную точку с бесконечностью.

> **Пример 2.** Потенциал в центре равномерно заряженной сферы радиуса R.

3. Другой способ расчета потенциала, основан на использовании формулы (5) для потенциала поля точечного заряда и принципа суперпозиции. Именно этот способ является наиболее важным, поскольку в подавляющем большинстве случаев расчет потенциала (скалярной величины) значительно более прост, чем расчет вектора напряженности электрического поля.

Пример 3. Потенциал в центре равномерно заряженной сферы радиуса R .

Пример 3-а. Потенциал на оси равномерно заряженного кольца.

Пример 3-б. Потенциал на расстоянии r от конца равномерно заряженной палочки, длина которой L и заряд Q.

4. Формула (7) позволяет по известному потенциалу рассчитывать поле $\vec{E}$. Эта задача сводится к дифференцированию функции, что обычно значительно проще вычисления интеграла (4) вдоль некоторой траектории.

Пример 4-а. Напряженность поля на оси равномерно заряженного кольца.

Пример 4-б. Напряженность поля точечного диполя.

5. *Потенциал - энергетическая характеристика электрического поля.* Зная распределение потенциала в пространстве можно легко решать многие задачи о движении заряженных частиц.