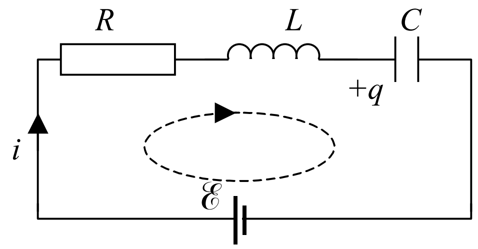
5. Электрические колебания

5.1. Колебательный контур

Колебаниями в физике называют не только периодические движения тел, но и всякий периодический или почти периодический процесс, в котором значения той или иной физической величины повторяются точно или приблизительно.

Изучение электрических колебаний начнем с вывода уравнения колебательного контура. Так называется система, состоящая из последовательно соединенных конденсатора емкостью C, катушки индуктивности L и проводника с омическим сопротивлением R.



Ограничимся изучением электрических цепей с сосредоточенными емкостями и индуктивностями, и будем считать переменные токи квазистационарными. Квазистационарность означает, что *мгновенные* значения силы тока i практически одинаковы во всех участках последовательной цепи. Это условие будет выполнено, если за время прохождения сигнала по цепи $\tau = l/c$ (l-длина цепи, c - скорость света) сила тока меняется незначительно ($\tau << T$, где T - период колебаний). Если принять $l = 1$ м, то токи можно считать квазистационарными при частотах $f = 1/T << c/l =$ 300 МГц.

Выбираем положительное направление обхода контура. Ток i считается положительным, если он течет в направлении обхода. Обозначим через q заряд той обкладки конденсатора, в которую втекает положительный ток (рис.). Тогда

$$\mathscr{E}(t) + \mathscr{E}_i = U_R + U_C.$$

$$\mathscr{E}_i = -\frac{d\Phi}{dt}, \qquad u_R = iR, \qquad u_C = \frac{q}{C}, \qquad i = \frac{dq}{dt}.$$

Из этих уравнений получим

$$L\frac{di}{dt} + iR + \frac{q}{C} = \mathscr{E}(t), \text{ или}$$

$$L\frac{d^2q}{dt^2} + R\frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = \mathscr{E}(t),$$

$$\boxed{\frac{d^2q}{dt^2} + 2\beta\frac{dq}{dt} + \omega_0^2 q = \frac{\mathscr{E}(t)}{L}}, \tag{1}$$

где введены обозначения

$$\beta = \frac{R}{2L}, \qquad \omega_0^2 = \frac{1}{LC}.$$

Уравнение (1) называется уравнением колебательного контура.

5.2. Свободные колебания

Рассмотрим сначала случай, когда $\mathscr{E}(t) = 0$ и нет омического сопротивления. Тогда

$$\boxed{\frac{d^2 q}{dt^2} + \omega_0^2 q = 0}.$$

Это уравнение гармонических колебаний. Его общее решение

$$q = q_m \cos(\omega_0 t + \alpha)$$

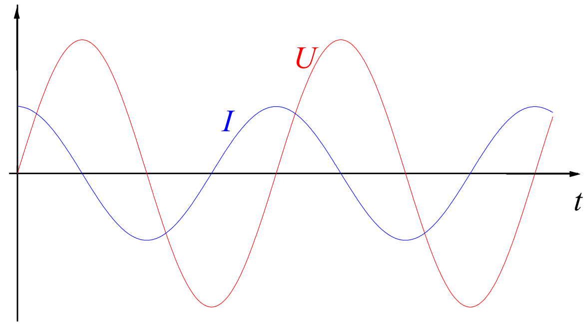
содержит две произвольные постоянные q_m и α, которые определяются начальными условиями. Период собственных колебаний

$$T = 2\pi\sqrt{LC}\,.$$

Эта формула называется формулой Томсона. Ток и напряжение также меняются по гармоническому закону:

$$i = \frac{dq}{dt} = -q_m \omega_0 \sin(\omega_0 t + \alpha) = i_m \cos(\omega_0 t + \alpha + \pi/2)\,.$$

$$u = \frac{q}{C} = \frac{q_m}{C}\cos(\omega_0 t + \alpha) = u_m \cos(\omega_0 t + \alpha)\,.$$



На рис. приведены соответствующие графики. Ток опережает напряжение по фазе.

Как возбудить электрические колебания в контуре? ……..

В начальный момент времени вся энергия контура сосредоточена в конденсаторе. Конденсатор начинает разряжаться, через катушку течет ток. Электрическая энергия конденсатора начинает превращаться в магнитную энергию катушки индуктивности. В некоторый момент заряд конденсатора обратится в ноль, а ток в контуре достигнет максимума. Начиная с этого момента ток, не меняя направления, начинает убывать. Однако он не сразу спадает до нуля, так как этому препятствует электродвижущая сила индукции. Ток "перезаряжает" пластины конденсатора: та, которая раньше была заряжена положительно, теперь будет приобретать отрицательный заряд. Возникнет электрическое поле, стремящееся ослабить ток. В конце концов, ток обратится в ноль, а заряд на конденсаторе достигнет максимума. И так далее. И если бы не было потерь энергии, то такие колебания бы повторялись неограниченно долго.

Энергия конденсатора равна

$$W_C = \frac{q^2}{2C} = \frac{q_m^2}{2C}\cos^2(\omega_0 t + \alpha)\,,$$

энергия катушки

$$W_L = \frac{Li^2}{2} = \frac{L q_m^2 \omega_0^2}{2}\sin^2(\omega_0 t + \alpha) = \frac{q_m^2}{2C}\sin^2(\omega_0 t + \alpha)\,.$$

Полная энергия

$$W = W_C + W_L = \frac{q_m^2}{2C}$$

остается неизменной во времени.

5.3. Затухающие колебания

В этом случае ($\mathscr{E}(t) = 0$, $R \neq 0$) решение дифференциального уравнения (1) при $\omega_0 > \beta$ имеет вид

$$q = q_0 e^{-\beta t} \cos(\omega t + \alpha),$$

где $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$. Кривая $q(t)$, представляемая этой формулой, не периодична. Однако величина q периодически проходит через ноль и бесконечное число раз достигает максимума и минимума. В этом смысле процессы, описываемые этой формулой, являются колебательными. Они называются затухающими колебаниями. Величину $T = 2\pi/\omega$ называют периодом затухающих колебаний, а величину $A(t) = q_0 e^{-\beta t}$ – амплитудой затухающих колебаний. Она экспоненциально убывает во времени.

Время $\tau = 1/\beta$, за которое амплитуда убывает в e раз, называется временем затухания. Обратная этому времени величина β называется коэффициентом затухания.

За период затухающих колебаний амплитуда убывает в $\dfrac{A(t)}{A(t+T)} = e^{\beta T}$ раз. Логарифм этого отношения

$$\lambda = \ln \frac{A(T)}{A(t+T)} = \beta T$$

называется логарифмическим декрементом колебаний.

5.4. Вынужденные электрические колебания. Переменный ток

Рассмотрим электрические колебания, возникающие в том случае, когда в цепи имеется генератор, электродвижущая сила $\mathscr{E}(t)$ которого изменяется периодически. Будем рассматривать только такие токи, которые изменяются по синусоидальному закону. Это объясняется несколькими причинами.

Во-первых, многие технические генераторы переменного тока имеют ЭДС, изменяющуюся по закону, близкому к синусоидальному. Во-вторых, теория синусоидальных токов особенно проста, и поэтому на примере таких токов можно легко выяснить основные особенности электрических колебаний. В-третьих, согласно известной математической теореме Фурье всякая функция $f(t)$ довольно общего вида может быть представлена в виде суммы синусоидальных функций. Поэтому теория синусоидального тока позволяет получать важные результаты и для тока, изменяющегося во времени по произвольному (несинусоидальному) закону.

Наконец, будем считать, что колебания являются установившимися. Иными словами, будем предполагать, что с момента начала колебаний прошло достаточно большое время, так что *амплитуды* тока и напряжения уже достигли своих постоянных значений и далее не изменяются.

5.5. Резистор в цепи переменного тока

5.6. Конденсатор в цепи переменного тока

5.7. Катушка индуктивности в цепи переменного тока

5.8. Последовательное соединение резистора, конденсатора и катушки индуктивности. Резонанс напряжений

Этот материал изложен в Приложении-4 сборника описания лабораторных работ «Электричество и магнетизм». Эти вопросы войдут в экзаменационные билеты. Их следует изучить самостоятельно.

5.9. Метод комплексных амплитуд расчета цепей переменного тока

1. Для анализа цепей переменного тока часто используется метод векторных диаграмм. Однако более широкое распространение получил метод комплексных амплитуд, отличающийся от метода векторных диаграмм только по форме.

2. Комплексное число при помощи известной формулы Эйлера

$$e^{j\varphi} = \cos\varphi + j\sin\varphi$$

можно представить в виде

$$z = ae^{j\varphi} = a(\cos\varphi + j\sin\varphi),$$

где

$a = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ - модуль комплексного числа,

$x = a\cos\varphi = \mathrm{Re}(z)$ - действительная часть,

$y = a\sin\varphi = \mathrm{Im}(z)$ - мнимая часть,

$\varphi = \mathrm{arctg}\left(\dfrac{y}{x}\right)$ - аргумент комплексного числа.

Гармонические колебания некоторой величины

$$f = a\cos(\omega t + \varphi_0)$$

можно записать, взяв вещественную часть комплексного выражения $F = ae^{j(\omega t+\varphi_0)}$:

$$f = a\cos(\omega t + \varphi_0) = \mathrm{Re}\left(ae^{j(\omega t+\varphi_0)}\right).$$

Комплексная величина F отображает гармонические колебания, в том смысле, что реальная часть этой величины и есть гармонические колебания.

Гармонические колебания можно записать более компактно, если ввести величину

$$A = ae^{j\varphi_0},$$

которая называется комплексной амплитудой. Тогда

$$F = Ae^{j\omega t}, \qquad f = \mathrm{Re}\left(Ae^{j\omega t}\right)$$

Модуль комплексной амплитуды равен амплитуде колебаний, а аргумент комплексной амплитуды равен начальной фазе колебаний. Таким образом, при известной частоте комплексная амплитуда полностью характеризует гармонические колебания, определяя и ее амплитуду, и начальную фазу.

Пример:

колебания:	$f = 5\cos(\omega t + \pi/3)$,
комплексная амплитуда:	$A = 5e^{j\pi/3}$
комплексное представление колебаний:	$F = Ae^{j\omega t} = 5e^{j(\omega t + \pi/3)}$
обратное преобразование:	$f = \mathrm{Re}(F)$

3. Представление колебаний в виде комплексных величин удобно, поскольку при выполнении широкого класса математических операций (линейных и вещественных) можно менять порядок выполнения математической операции и взятия реальной части.

Например:

$$\mathrm{Re}(A) + \mathrm{Re}(B) = \mathrm{Re}(A + B) .$$

$$\alpha\,\mathrm{Re}(A) = \mathrm{Re}(\alpha A)\text{, где } \alpha \text{ - действительное,}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\mathrm{Re}(A)\right) = \mathrm{Re}\left(\frac{dA}{dt}\right),$$

$$\int \mathrm{Re}(A)dt = \mathrm{Re}\left(\int Adt\right).$$

Обычно удобнее работать с представлениями колебаний в виде комплексных величин, и лишь в самом конце вычислений взять реальную часть от полученного комплексного результата.

4. Пример: Найти амплитуду колебаний:

$$f = a\cos\omega t + 2a\cos(\omega t + \pi/3).$$

Решение: $F = ae^{j\omega t} + 2ae^{j(\omega t + \pi/3)} = ae^{j\omega t}\left(1 + 2e^{j\pi/3}\right) = Ae^{j\omega t}$, где

$$A = a\left(1 + 2e^{j\pi/3}\right) = a\left(1 + 2\cos\pi/3 + 2j\sin\pi/3\right) = a(1 + 1 + 2j\sqrt{3}/2) = a(2 + j\sqrt{3}) .$$

Амплитуда колебаний f_m равна модулю комплексной амплитуды A:

$$f_m = |A| = a\sqrt{4 + 3} = a\sqrt{7} .$$

5. Рассмотрим вынужденные колебания в последовательном колебательном контуре, считая, что внешняя ЭДС изменяется синусоидально:

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_m \cos\omega t .$$

Наряду с действительными величинами

$$q\,, \quad i = \frac{dq}{dt}, \quad u = \frac{q}{C}, \quad \mathcal{E}(t) = \mathcal{E}_m \cos\omega t$$

введем соответствующие им комплексные величины

$$Q = Q_m e^{j\omega t}\,,\; I = I_m e^{j\omega t}\,,\; U = U_m e^{j\omega t}\,,\; E = \mathcal{E}_m e^{j\omega t}\,,$$

Такие, что:

$$q = \mathrm{Re}(Q)\,,\; i = \mathrm{Re}(I)\,,\; u = \mathrm{Re}(U)\,,\; \mathcal{E} = \mathrm{Re}(E)\,.$$

Эти комплексные величины связаны уравнениями

$$I = \frac{dQ}{dt}, \ \ U = \frac{Q}{C}, \tag{2}$$

$$\frac{d^2Q}{dt^2} + 2\beta\frac{dQ}{dt} + \omega_0^2 Q = \frac{E}{L}, \tag{1-а}$$

Нужно определить комплексные амплитуды заряда Q_m, тока I_m и напряжения U_m. Подставляя в уравнение (1) $Q = Q_m e^{j\omega t}$, $E = \mathscr{E}_m e^{j\omega t}$, получим

$$-\omega^2 Q_m + 2\beta j\omega Q_m + \omega_0^2 Q_m = \mathscr{E}_m / L .$$

Следовательно,

$$Q_m = \frac{(\mathscr{E}_m / L)}{\omega_0^2 - \omega^2 + 2j\omega\beta}.$$

Далее, при помощи (2) найдем комплексные ток и напряжение:

$$I = j\omega Q_m e^{j\omega t}, \quad U = \frac{Q_m}{C} e^{j\omega t}.$$

Конечно, эти решения лишь символически представляют вынужденные колебания. В них должны быть оставлены только реальные части. По существу осталось выполнить простую математическую процедуру – найти модули и аргументы комплексных величин. Проведем такие расчеты для тока. Комплексная амплитуда тока равна

$$I_m = j\omega Q_m = \left(\frac{\mathscr{E}_m}{L}\right)\frac{j\omega}{\omega_0^2 - \omega^2 + 2j\omega\beta}.$$

Отсюда

$$\mathscr{E}_m = I_m\left(\frac{L\omega_0^2}{j\omega} - \frac{\omega L}{j} + 2\beta L\right) = I_m\left(\frac{1}{j\omega C} + j\omega L + R\right).$$

Величину в скобках называют комплексным сопротивлением цепи:

$$z = \frac{\mathscr{E}_m}{I_m} = \frac{1}{j\omega C} + j\omega L + R. \tag{3}$$

Амплитуда тока

$$i_m = |I_m| = \frac{\mathscr{E}_m}{|z|} = \frac{\mathscr{E}_m}{\sqrt{\left(\frac{1}{\omega C} - \omega L\right)^2 + R^2}}.$$

Нетрудно вычислить также начальную фазу тока

$$\mathrm{tg}\varphi_0 = -\frac{\omega L - (1/\omega C)}{R}.$$

Тогда

$$i = i_m \cos(\omega t + \varphi_0).$$

Заметим, что формула (3) для комплексного сопротивления цепи представляет собой сумму трех комплексных сопротивлений конденсатора

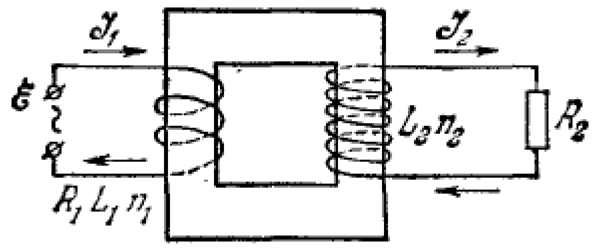
$$z_C = \frac{1}{j\omega C},$$

катушки

$$z_L = j\omega L$$

и резистора R. Оказывается, этот результат имеет общий характер. Комплексное сопротивление любой цепи можно рассчитать по обычным правилам расчета цепей постоянного тока, если приписать емкости и индуктивности указанные выше комплексные сопротивления. Зная комплексные сопротивления можно рассчитать комплексные амплитуды, а затем и действительные амплитуды и начальные фазы.

5.10. Трансформатор



Трансформатор состоит из двух обмоток – первичной и вторичной, навитых на общий железный сердечник (рис.). Первичная обмотка подключается к источнику переменной ЭДС, величина которой обычно изменяется по синусоидальному закону: $\mathcal{E} = \mathcal{E}_m \cos(\omega t)$.

Уравнения колебаний в такой системе записывается в виде

$$R_1 i_1 = \mathcal{E} - \Phi_1', \quad R_2 i_2 = -\Phi_2', \tag{1}$$

где $\Phi_{1,2}$ - магнитные потоки через витки первичной и вторичной катушек, $i_{1,2}$ - токи в этих обмотках, $R_{1,2}$ – сопротивления первичной и вторичной цепей.

Поскольку сердечник сделан из ферромагнитного материала, то магнитные линии практически не выходят из сердечника (магнитопровода). Считая, что магнитный поток Φ_0 через любое поперечное сечение сердечника одинаков, можно записать

$$\Phi_1 = \Phi_0 N_1, \ \ \Phi_2 = N_2 \Phi_0,$$

где $N_{1,2}$ – число витков в обмотках. Следовательно,

$$\Phi_1' N_2 = \Phi_2' N_1. \tag{2}$$

Из уравнений 1), (2) получим

$$\mathcal{E} = R_1 i_1 - R_2 i_2 \frac{N_1}{N_2}.$$

Обычно сопротивление R_1 провода первичной обмотки значительно меньше ее индуктивного сопротивления и выполняется неравенство

$$| R_1 i_1 | << | \Phi_1' |.$$

Тогда $\mathcal{E} \approx -R_2 i_2 \dfrac{N_1}{N_2}$. Обозначая $u_1 = \mathcal{E}$, $u_2 = i_2 R_2$, получим

$$u_2 = -\frac{N_2}{N_1} u_1.$$

Знак «минус» отражает наличие фазового сдвига на 180^0 между напряжениями u_1 и u_2. Таким образом, можно трансформировать (увеличивать или уменьшать) амплитуду синусоидального напряжения.