Выдержки из книги Горбатого И.Н. «Механика»

3.2. Работа. Мощность. Кинетическая энергия.

Рассмотрим частицу, которая под действием постоянной силы $\vec{F}$ совершает перемещение $\vec{l}$. Работой силы $\vec{F}$ на перемещении $\vec{l}$ называется скалярная величина равная

$$\boxed{A = |\vec{F}| \cdot |\vec{l}| \cdot \cos\alpha},$$

где α - угол между вектором силы и вектором перемещения. Работа положительна, если $\cos\alpha > 0$, и отрицательна при $\cos\alpha < 0$. При $\alpha = 90^0$ работа силы равна нулю. В системе СИ работа измеряется в джоулях (Дж).

Если сила на данном перемещении частицы не остается постоянной, то нужно вычислить работу на каждом малом перемещении $\Delta\vec{l}$, в пределах которого сила остается практически постоянной, а затем просуммировать результаты: работа равна сумме элементарных работ на всех малых перемещениях (см. Пример 3.7).

Если на частицу действуют несколько сил $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$, $\vec{F}_3$,..., то, пользуясь определением, можно вычислить работу каждой из этих сил на заданном перемещении. Суммарная работа, как нетрудно показать, равна работе результирующей силы $\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 \ldots$.

Для характеристики скорости, с которой совершается работа, вводят величину, называемую мощностью. Мощность, по определению, равна работе, совершаемой силой за единицу времени

$$\boxed{N = \frac{\Delta A}{\Delta t}},$$

где $\Delta A = |\vec{F}| \cdot |\Delta\vec{l}| \cdot \cos\alpha$ - работа силы $\vec{F}$ за промежуток времени Δt. Следовательно

$$N = \frac{|\vec{F}| \cdot |\Delta\vec{l}| \cdot \cos\alpha}{\Delta t}.$$

Учитывая, что $\Delta\vec{l} / \Delta t = \vec{V}$, получим

$$\boxed{N = |\vec{F}| \cdot |\vec{V}| \cdot \cos\alpha},$$

где $\vec{V}$ - скорость частицы в данный момент времени. Единицей мощности является ватт (Вт), равный джоулю в секунду (Дж/с).

Кинетическая энергия частицы по определению равна

$$\boxed{E_{\text{к}} = \frac{mV^2}{2}},$$

где m – масса частицы, V – ее скорость. Кинетическая энергия системы частиц равна сумме их кинетических энергий.

В механике доказывается важная теорема – <u>теорема об изменении кинетической энергии</u>: <u>приращение кинетической энергии системы частиц равно алгебраической сумме работ всех сил, действующих на частицы системы</u>

$$\boxed{E_{\text{к}2} - E_{\text{к}1} = A_{\text{всех сил}}}.$$

Примеры решения задач

Пример 3. 6. За какое время t поднимают вертикально вверх на высоту h = 20 м первоначально покоившийся груз массой m = 20 кг, действуя на него с постоянной силой, если работа этой силы по подъему тела равна A = 4160 Дж?

Решение

На груз действуют две силы: сила тяжести $m\vec{g}$ и внешняя сила $\vec{F}$. Поскольку груз движется вертикально, то и вектор $\vec{F}$ направлен вертикально вверх. Работа этой силы при подъеме груза на высоту h равна

$$A = Fh .$$

Груз движется с постоянным ускорением

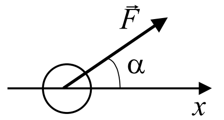
$$a = (F - mg)/m ,$$

следовательно:

$$h = at^2/2 .$$

Из записанных уравнений найдем

$$t = h\sqrt{\frac{2m}{A - mgh}} = 10 \text{ с.}$$



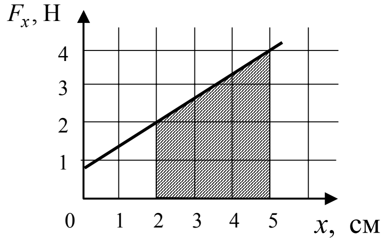


Рис. 3.5.

Пример 3. 7. Частица перемещается вдоль оси x. $\vec{F}$ - одна из сил, действующих на частицу. На рис.3.5 приведен график зависимости проекции этой силы на ось x от координаты частицы. Определите работу силы $\vec{F}$ при перемещении частицы из точки с координатой $x_1 = 2$ см в точку с координатой $x_2 = 5$ см.

Решение

Работа на перемещении от x_1 до x_2 равна сумме элементарных работ на бесконечно малых перемещениях Δx_i:

$$A = \sum \Delta A_i = \sum F_i \cos\alpha_i \cdot \Delta x_i\ .$$

Произведение $F_i \cos\alpha_i$ равно проекции силы F_i на ось x. Следовательно

$$A = \sum F_{xi} \Delta x_i\ .$$

Каждое слагаемое в этой сумме численно равно площади прямоугольника с бесконечно малым основанием Δx_i и высотой F_{xi}. Вся сумма численно равна площади под графиком функции $F_x(x)$ на интервале от x_1 до x_2. Вычисляя площадь заштрихованной на рис.3.5 трапеции, получим

$$A = \frac{(2+4)}{2} \cdot (0{,}05 - 0{,}02) = 0{,}09 \text{ Дж.}$$

Пример 3. 8. Какую работу A нужно совершить, чтобы увеличить скорость тела от $V_0 = 2$ м/с до $V_1 = 6$ м/с на горизонтальном пути $s = 10$ м. На всем пути на тело действует постоянная сила трения $F_{\text{тр}} = 2$ Н. Масса тела $m = 1$ кг.

Решение

По теореме об изменении кинетической энергии

$$\frac{mV_1^2}{2} - \frac{mV_0^2}{2} = A + A_{\text{тр}},$$

где

$$A_{\text{тр}} = F_{\text{тр}} s \cos 180^0 = -F_{\text{тр}} s .$$

Отсюда

$$A = \frac{m\left(V_1^2 - V_0^2\right)}{2} + F_{\text{тр}} \cdot s = 36 \text{ Дж}$$

<u>**Пример 3. 9.**</u> Из винтовки выстрелили вертикально вверх. Найдите суммарную работу A сил тяжести и сопротивления воздуха, действующих на пулю, к моменту времени, когда скорость пули после изменения направления движения стала в $n = 2$ раза меньше ее начальной скорости $V_0 = 400$ м/с. Масса пули $m = 10$ г.

<u>Решение</u>
По теореме об изменении кинетической энергии

$$\frac{m(V_0 / n)^2}{2} - \frac{mV_0^2}{2} = A .$$

Отсюда

$$A = -\frac{mV_0^2}{2}\left(1 - \frac{1}{n^2}\right) = -600 \text{ Дж.}$$

3.3. Потенциальная энергия. Закон сохранения механической энергии

Теорема об изменении кинетической энергии полезна при решении многих задач механики. Основная трудность при ее использовании состоит в вычислении работы сил, действующих на тела системы. Эту работу просто вычислить, лишь в тех случаях, когда все силы постоянны по величине и направлению. Если это не так, то приходится вычислять работу на каждом бесконечно малом перемещении частицы, а затем суммировать полученные работы для всего перемещения.

Работа силы, вообще говоря, зависит не только от начального и конечного положений частицы, но и от формы траектории перемещения частицы. Существует, однако, класс сил, <u>работа которых не зависит от</u>

формы траектории, а определяется только положениями начальной и конечной точек. Такие силы называются консервативными. В механике к консервативным силам относятся силы тяжести и упругости.

Для консервативных сил можно ввести потенциальную энергию, зависящую от координат частицы, так что работа консервативной силы на произвольной траектории между точками 1 и 2 равна убыли потенциальной энергии:

$$\boxed{A_{12} = E_{п1} - E_{п2}}.$$

Это соотношение можно рассматривать как формальное определение потенциальной энергии.

Потенциальная энергия частицы в поле силы тяжести равна

$$\boxed{E_{п} = mgh},$$

где m – масса частицы, h – ее координата на оси y, направленной вертикально вверх. Начало отсчета на этой оси y может быть выбрано произвольно, поскольку работа силы тяжести, определяется разностью координат:

$$A_{12} = mg(h_1 - h_2)$$

Потенциальная энергия упруго деформированной пружины равна

$$\boxed{E_{п} = \frac{kx^2}{2}}$$

где x – деформация пружины. При изменении деформации пружины от x_1 до x_2 сила упругости совершают работу

$$A_{12} = E_{п1} - E_{п2} = \frac{kx_1^2}{2} - \frac{kx_2^2}{2}.$$

Заметим, что потенциальную энергию следует относить не к частице, а к системе взаимодействующих между собой частиц и тел. Например, потенциальная энергия mgh - есть энергия взаимодействия тела массой m с Землей, энергия $kx^2/2$ - есть энергия взаимодействия отдельных частей упруго деформированной пружины.

К числу неконсервативных сил относятся силы трения и сопротивления. Работа этих сил зависит от формы траектории и для них нельзя ввести потенциальную энергию.

Если тела, составляющие замкнутую механическую систему, взаимодействуют между собой только силами тяготения и упругости, то работа этих сил равна убыли потенциальной энергии тел:

$$A_{всех\ сил} = E_{п1} - E_{п2}$$

По теореме об изменении кинетической энергии

$$E_{к2} - E_{к1} = A_{всех\ сил}$$

Отсюда следует

$$E_{к2} - E_{к1} = E_{п1} - E_{п2},$$

или

$$\boxed{E_{п1} + E_{к1} = E_{п2} + E_{к2}}.$$

Таким образом, сумма кинетической и потенциальной энергии тел, составляющих замкнутую систему и взаимодействующих между собой силами тяготения и упругости, остается неизменной.

Это утверждение выражает закон сохранения энергии в механических процессах. Он является следствием законов Ньютона. Сумму $E = E_п + E_к$ называют полной механической энергией. Закон сохранения механической энергии выполняется только тогда, когда тела в замкнутой системе взаимодействуют между собой консервативными силами, то есть силами, для которых можно ввести понятие потенциальной энергии.

Если система тел, взаимодействующих между собой только консервативными силами, не является замкнутой, то

$$A_{всех\ сил} = E_{п1} - E_{п2} + A_{внеш},$$

где $A_{внеш}$ – работа внешних сил. По теореме об изменении кинетической энергии

$$E_{к2} - E_{к1} = A_{всех\ сил} = E_{п1} - E_{п2} + A_{внеш}.$$

Отсюда следует, что изменение механической энергии системы в этом случае равно работе внешних сил:

$$\boxed{E_2 - E_1 = A_{внеш}},$$

где $E_2 = E_{к2} + E_{п2}$, $E_1 = E_{к1} + E_{п1}$.

Если кроме сил тяготения и упругости на тела системы действуют и неконсервативные силы (силы трения, сопротивления), то работа неконсервативных сил $A_{тр}$ также приводит к изменению полной механической энергии системы:

$$\boxed{E_2 - E_1 = A_{внеш} + A_{тр}}.$$

Примеры решения задач

Пример 3. 10. Тело массой $m = 0{,}5$ кг брошено вертикально вверх. Когда тело поднялось на некоторую высоту, его потенциальная энергия увеличилась на $\Delta E_{п} = 25$ Дж, а кинетическая энергия уменьшилась в $k = 2$ раза по сравнению с начальной. На какую максимальную высоту H над точкой старта поднимется тело? Сопротивлением воздуха пренебречь.

Решение

Обозначим $E_{к}$ и $E_{п}$ - кинетическую и потенциальную энергию тела в точке старта сразу после броска. Тогда, по закону сохранения механической энергии

$$E_{п} + E_{к} = (E_{п} + \Delta E_{п}) + (E_{к} / k),$$

$$E_{п} + E_{к} = E_{п} + mgH .$$

Из этих уравнений найдем

$$H = \frac{k\Delta E_{п}}{mg(k-1)} = 10 \text{ м}.$$

Заметим, что результат не зависит от величины $E_{п}$ и потенциальную энергию в точке старта можно было сразу принять равной нулю.

Пример 3. 11. Шарик небольшого радиуса висит на легкой нерастяжимой нити длиной $l = 40$ см. Шарик отклонили от положения равновесия так, что нить составила с вертикалью угол $\alpha = 60^0$, и без толчка отпустили. Определите максимальную скорость шарика при его последующем движении. Сопротивлением воздух пренебречь.

Решение

Поскольку нить нерастяжимая, то шарик будет двигаться по окружности. Очевидно, что скорость шарика максимальна в нижней точке траектории. Так как сопротивление воздуха отсутствует, можно воспользоваться законом сохранения механической энергии. Будем считать, что потенциальная энергия шарика в нижней точке траектории равна нулю. Тогда начальная энергия шарика

$$E_1 = mgh ,$$

а конечная

$$E_2 = \frac{mV^2}{2},$$

где V – скорость шарика в нижней точке траектории. По закону сохранения энергии

$$mgh = \frac{mV^2}{2}.$$

Высоту h найдем, рассматривая прямоугольный треугольник на рис.3.6:

$$h = l - l\cos\alpha = l(1-\cos\alpha) = 2l\sin^2(\alpha/2).$$

Окончательно получим

$$V = 2\sqrt{gl}\sin\frac{\alpha}{2} = 2 \text{ м/с}.$$

<u>Пример 3. 12.</u> Пружину игрушечного пистолета сжимают на Δx = 2 см, приложив силу F = 12,5 Н. С какой скоростью V вылетит из пистолета шарик массой m = 10 г при горизонтальном выстреле?

<u>Решение</u>

Сжатая пружина пистолета обладает потенциальной энергией

$$E_\text{п} = k\Delta x^2/2.$$

Пружина распрямляется, ее потенциальная энергия становится равной нулю, при этом шарик приобретает кинетическую энергию. По закону сохранения энергии

$$\frac{k\Delta x^2}{2} = \frac{mV^2}{2}.$$

Учтем также, что

$$F = k\Delta x.$$

Отсюда получим

$$V = \sqrt{F\Delta x/m} = 5 \text{ м/с}$$

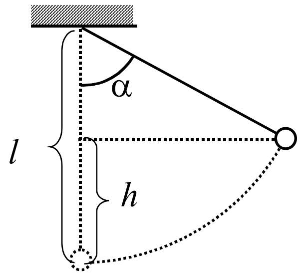


Рис. 3.6.

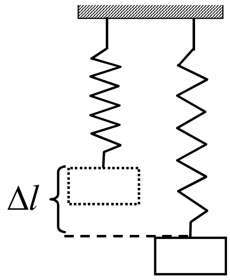


Рис. 3.7.

Пример 3. 13. К нижнему концу недеформированной пружины жесткостью k = 200 Н/м прикрепили груз массой m = 1 кг и без толчка отпустили. Определите максимальную деформацию Δl пружины.

Решение

Примем, что потенциальная энергия равна нулю в нижней точке траектории груза, когда растяжение пружины равно Δl (рис.3.7). Тогда в исходном положении энергия системы $E_1 = mg\Delta l$, а в нижней точки траектории груза энергия равна $E_2 = k\Delta l^2/2$. По закону сохранения механической энергии

$$mg\Delta l = \frac{k\Delta l^2}{2}.$$

Отсюда

$$\Delta l = \frac{2mg}{k} = 10 \text{ см}$$

При решении этой задачи многие абитуриенты допускаю типичную ошибку, считая, что максимальная деформация пружины будет в положении равновесия, когда $mg = k\Delta l$. Конечно это не так: груз «проскочит» положение равновесия с максимальной скоростью и лишь после этого начнет замедляться.

Пример 3. 14. Груз массой m висит на легкой пружине жесткостью k. Какую минимальную работу A нужно совершить, чтобы, смещая груз по вертикали, перевести пружину в недеформированное состояние? Ускорение свободного падения равно g.

Решение

Когда груз неподвижно висит на пружине, действующая на него сила тяжести уравновешивается силой упругости

$$mg = kx,$$

где x – удлинение пружины. Примем, что в начальном состоянии (в положении равновесия) потенциальная энергия силы тяжести равна нулю. Тогда полная механическая энергия в начальном состоянии равна

$$E_1 = \frac{kx^2}{2}.$$

В конечном состоянии, когда груз сместят вверх на расстояние x и пружина перейдет в недеформированное состояние, энергия системы станет равной

$$E_2 = mgx.$$

Энергия системы увеличивается, поскольку внешняя сила совершает положительную работу:

$$E_1 + A = E_2.$$

Отсюда найдем

$$A = mgx - \frac{kx^2}{2}.$$

Подставляя в эту формулу $x = mg / k$, окончательно получим

$$A = (mg)^2 / 2k.$$

Пример 3. 15. Камень массой m = 1 кг бросили с высоты h = 30 м с начальной скоростью V_0 = 25 м/с. Перед ударом о землю скорость камня V_1 = 30 м/с. Определите работу A силы сопротивления воздуха при движении камня.

Решение

Начальная энергия камня на высоте h равна

$$E_1 = mgh + \frac{mV_0^2}{2}.$$

Перед ударом о землю энергия камня стала равной

$$E_2 = \frac{mV_1^2}{2}.$$

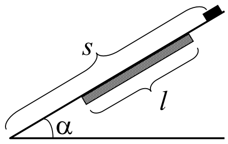
Изменение механической энергии равно работе силы сопротивления воздуха

$$E_2 - E_1 = A\ .$$

Из записанных выше уравнений найдем

$$A = m\left(\frac{V_1^2 - V_0^2}{2} - gh\right) = .–162{,}5\ \text{Дж}$$

<u>Пример 3. 16.</u> Небольшая шайба начинает скользить по наклонной плоскости, составляющей угол $\alpha = 30^0$ с горизонтом. На наклонной плоскости имеется шероховатый участок длиной $l = 1$ м с коэффициентом трения $\mu = 0{,}2$ между плоскостью и шайбой (см. рис.); вне этого участка трение отсутствует. Определите скорость шайбы V на расстоянии $s = 2$ м от точки старта.



<u>Решение</u>

На шайбу в процессе ее движения действуют три силы: сила тяжести, сила реакции опоры и сила трения. При перемещении шайбы на расстояние s сила тяжести совершает работу

$$A_{\text{тяж}} = mg \cdot s \cdot \cos(90^0 - \alpha) = mg \cdot s \cdot \sin\alpha\ .$$

Сила реакции опоры работу не совершает, поскольку она перпендикулярна вектору перемещения шайбы. Работа силы трения равна

$$A_{\text{тр}} = -F_{\text{тр}} l\ ,$$

где

$$F_{\text{тр}} = \mu N = \mu mg\cos\alpha\ .$$

Скорость шайбы найдем, воспользовавшись теоремой об изменении кинетической энергии

$$\frac{mV^2}{2} = A_{\text{тяж}} + A_{\text{тр}}\ .$$

Получим

$$V = \sqrt{2g(s\sin\alpha - \mu l\cos\alpha)} \approx 4{,}1\ \text{м/с}.$$