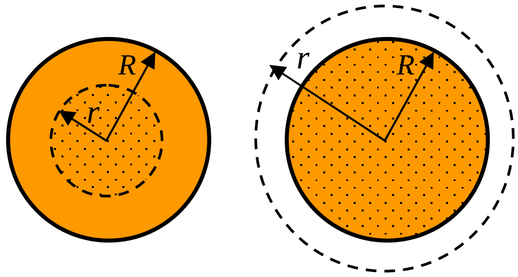
Теорема о циркуляции вектора $\vec{B}$

(Примеры решения задач)

Пример 1.

По прямому проводу, радиус сечения которого R, течет постоянный ток плотности $\vec{j}$, однородно распределенный по сечению. Пренебрегая влиянием вещества провода, найдите модуль вектора индукции магнитного поля внутри и вне провода в зависимости от расстояния r до оси провода.

Решение.



В силу осевой симметрии линии индукции магнитного поля (линии, касательные к которым в любой точке совпадают по направлению с вектором магнитной индукции $\vec{B}$) представляют собой окружности, плоскости которых перпендикулярны оси провода, а центры лежат на этой оси. Воспользуемся теоремой о циркуляции вектора магнитной индукции $\vec{B}$:

$$\oint_L \vec{B}d\vec{l} = \mu_0 I ,$$

где I – ток, «пронизывающий» выбранный контур L. В качестве замкнутого контура L выберем окружность радиуса r (она совпадает с одной из линий магнитной индукции). Тогда

$$\oint_L \vec{B}d\vec{l} = 2\pi rB ,$$

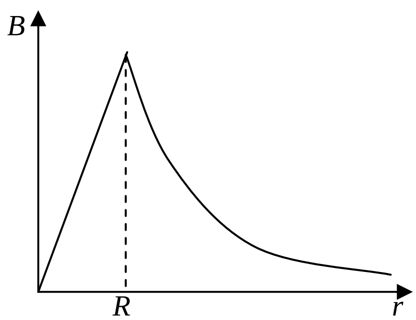
При вычислении тока I следует рассмотреть два случая (рис.): 1) контур радиуса r находится внутри провода $(r < R)$, 2) контур находится вне провода $(r > R)$. В первом случае $I = \pi r^2 j$, а во втором $I = \pi R^2 j$. Поэтому при $r < R$ получим

$$2\pi rB = \mu_0 \pi r^2 j , \qquad B = \frac{\mu_0 j}{2} r ,$$

а при $r > R$

$$2\pi rB = \mu_0 \pi R^2 j , \qquad B = \frac{\mu_0 \pi R^2 j}{2\pi r} = \frac{\mu I_0}{2\pi r} ,$$

где $I_0 = \pi R^2 j$ - ток в проводе. График зависимости модуля вектора индукции от расстояния r показан на рисунке.



Пример 2.

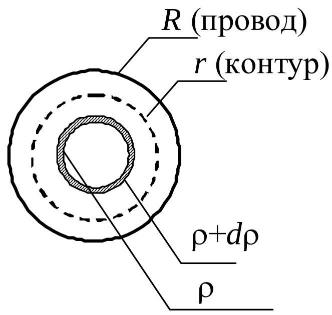
По бесконечно длинному прямому проводу круглого сечения радиуса R течет постоянный ток, плотность которого зависит от расстояния r до оси провода по закону $j = kr$, где k – известная постоянная. Пренебрегая влиянием вещества провода, найдите модуль вектора индукции магнитного поля внутри и вне провода в зависимости от r.

Решение.

В силу осевой симметрии линии индукции магнитного поля представляют собой окружности, плоскости которых перпендикулярны оси провода, а центры лежат на этой оси. Воспользуемся теоремой о циркуляции вектора магнитной индукции $\vec{B}$. В качестве замкнутого контура выберем окружность радиуса r (она совпадает с одной из линий магнитной индукции). Тогда

$$\oint_L \vec{B}d\vec{l} = 2\pi rB = \mu_0 I,$$

где I – ток, «пронизывающий» выбранный контур. При вычислении этого тока следует рассмотреть два случая: 1) контур радиуса r находится внутри провода ($r < R$), 2) контур находится вне провода ($r > R$).



Рассмотрим сначала случай $r < R$. Для вычисления тока, пронизывающего контур, разобьем сечение проводника на бесконечно узкие кольца (рис.). Рассмотрим одно из таких колец радиусом ρ и шириной $d\rho$. Площадь кольца

$$dS = 2\pi\rho d\rho,$$

а протекающий через него ток

$$dI = jdS = k\rho \cdot 2\pi\rho d\rho.$$

Интегрируя, получим

$$I = \int_0^r 2\pi k\rho^2 d\rho = \frac{2\pi kr^3}{3}. \qquad (1)$$

Следовательно,

$$2\pi rB = \mu_0 \frac{2\pi kr^3}{3}.$$

Отсюда

$$B = (1/3)\mu_0 kr^2.$$

Эта формула справедлива внутри провода (при $r < R$).

Поле вне провода вычислим, выбирая замкнутый контур в виде окружности радиусом $r > R$. Через этот контур протекает весть ток. Его легко найти при помощи (1), полагая $r = R$:

$$I_0 = 2\pi kR^3/3.$$

По теореме о циркуляции

$$2\pi rB = 2\pi\mu_0 kR^3/3.$$

Следовательно,

$$B = \frac{\mu_0 kR^3}{3r}.$$

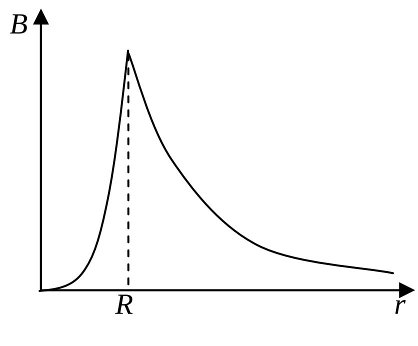
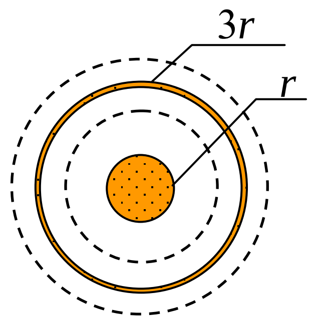


График зависимости $B(r)$ показан на рисунке.

Пример 3.

Коаксиальный кабель состоит из внутреннего сплошного цилиндрического проводника радиуса r и наружной тонкостенной проводящей трубки радиуса $3r$. Найдите индукцию магнитного поля в точках, удаленных от оси цилиндров на расстояния 1) $r/2$, 2) $2r$, 3) $4r$, если по внутреннему проводнику и по проводящей трубке текут токи одинаковой величины I в одном направлении. Токи I равномерно распределены по сечению внутреннего проводника и по поверхности проводящей трубки. Магнитная проницаемость всюду равна 1.



Решение.

Выбираем контур в виде окружности радиуса $r/2$ и записываем теорему о циркуляции вектора индукции для этого контура:

$$\oint_L \vec{B}d\vec{l} = 2\pi(r/2)B = \mu_0 I_1,$$

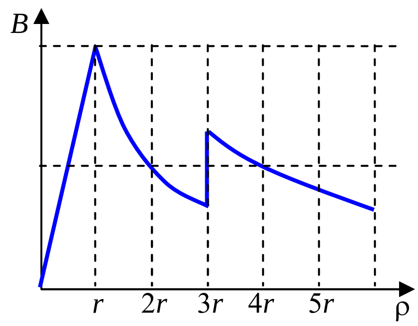
где $I_1 = I\dfrac{\pi(r/2)^2}{\pi r^2} = \dfrac{1}{4}I$ - ток, «пронизывающий» этот контур.

Отсюда получим для величины индукции магнитного поля на расстоянии $r/2$ от оси проводников $B(r/2) = \dfrac{\mu_0 I}{4\pi r}$.

Чтобы найти индукцию на расстоянии $2r$ от оси, выберем в качестве контура окружность радиуса $2r$. Через поверхность, ограниченную этим контуром, протекает ток I и теорема о циркуляции записывается в виде:

$$\oint_L \vec{B}d\vec{l} = 2\pi(2r)B = \mu_0 I .$$

Отсюда следует $B(2r) = \dfrac{\mu_0 I}{4\pi r}$.



Учитывая, что через поверхность, ограниченную окружностью радиуса $4r$ течет ток $2I$, при помощи теоремы о циркуляции аналогичным образом найдем: $B(4r) = \dfrac{\mu_0 I}{4\pi r}$.

График зависимости $B(\rho)$, где ρ - расстояние от оси системы, приведен на рисунке.