7. Энергия электрического поля

(Примеры решения задач)

<u>Энергия взаимодействия зарядов</u>

<u>Пример 1.</u>

Определите электрическую энергию взаимодействия точечных зарядов, расположенных в вершинах квадрата со стороной a (см. рис.2).

<u>Решение</u>.

На рис.3 условно изображены двунаправленными стрелками все парные взаимодействия зарядов. Учитывая энергии всех этих взаимодействий, получим:

$$W = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(-4\frac{q^2}{a} + 2\frac{q^2}{a\sqrt{2}}\right).$$

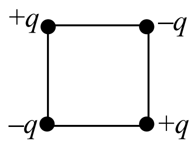	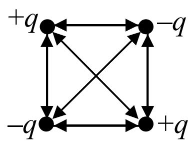	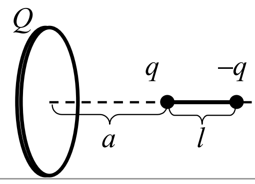
Рис.2	Рис.3	Рис.4

<u>Пример 2.</u>

Определите электрическую энергию взаимодействия заряженного кольца с диполем, расположенным на его оси, как показано на рис.4. Известны расстояния a, l, заряды Q, q и радиус кольца R.

<u>Решение</u>.

При решении задачи следует учесть все энергии парных взаимодействий зарядов одного тела (кольца) с зарядами другого тела (диполя). Энергия взаимодействия точечного заряда q с зарядом Q, распределенным по кольцу, определяется суммой

$$W_1 = \sum \frac{\Delta Q_i q}{4\pi\varepsilon_0 r_i},$$

где ΔQ_i - заряд бесконечно малого фрагмента кольца, r_i - расстояние от этого фрагмента до заряда q. Поскольку все r_i одинаковы и равны $\sqrt{R^2 + a^2}$, то

$$W_1 = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{R^2 + a^2}}\sum \Delta Q_i = \frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{R^2 + a^2}}.$$

Аналогично найдем энергию взаимодействия точечного заряда $-q$ с заряженным кольцом:

$$W_2 = \frac{-q}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{R^2 + (a+l)^2}}\sum \Delta Q_i = \frac{-qQ}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{R^2 + (a+l)^2}}.$$

Суммируя W_1 и W_2, получим для энергии взаимодействия кольца с диполем:

$$W = W_1 + W_2 = \frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{\sqrt{R^2 + a^2}} - \frac{1}{\sqrt{R^2 + (a+l)^2}}\right).$$

Электрическая энергия заряженных проводников

Пример 3.

Определите работу электрических сил при уменьшении в 2 раза радиуса однородно заряженной сферы. Заряд сферы q, ее первоначальный радиус R.

Решение.

Электрическая энергия уединенного проводника определяется формулой $W = (1/2)q\varphi$, где q – заряд проводника, φ - его потенциал. Учитывая, что потенциал однородно заряженной сферы радиуса R равен $\varphi = q/4\pi\varepsilon_0 R$, найдем ее электрическую энергию:

$$W_1 = \frac{q^2}{8\pi\varepsilon_0 R}.$$

После уменьшения в два раза радиуса сферы ее энергия становится равной

$$W_2 = \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 R}.$$

Электрические силы при этом совершают работу

$$A = W_1 - W_2 = -\frac{q^2}{8\pi\varepsilon_0 R}.$$

Пример 4.

Два металлических шара, радиусы которых r и $2r$, а соответствующие заряды $2q$ и $-q$, расположены в вакууме на большом расстоянии друг от друга. Во сколько раз уменьшится электрическая энергия системы, если шары соединить тонкой проволокой?

Решение.

После соединения шаров тонкой проволокой их потенциалы становятся одинаковыми

$$\frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 r} = \frac{Q_2}{4\pi\varepsilon_0 (2r)},$$

а установившиеся заряды шаров Q_1 и Q_2 получаются в результате перетекания заряда с одного шара на другой. При этом суммарный заряд шаров остается постоянным:

$$Q_1 + Q_2 = 2q - q.$$

Из этих уравнений найдем

$$Q_1 = q/3, \quad Q_2 = 2q/3.$$

Энергия шаров до соединения их проволокой равна

$$W_1 = \frac{(2q)^2}{8\pi\varepsilon_0 r} + \frac{(-q)^2}{8\pi\varepsilon_0 (2r)},$$

а после соединения

$$W_2 = \frac{Q_1^2}{8\pi\varepsilon_0 r} + \frac{Q_2^2}{8\pi\varepsilon_0 (2r)}.$$

Подставляя в последнее выражение значения Q_1 и Q_2, получим после простых преобразований

$$W_1 / W_2 = 27/2.$$

Пример 5.

В один шар слились $N = 8$ одинаковых шариков ртути, заряд каждого из которых q. Считая, что в начальном состоянии ртутные шарики находились на большом расстоянии друг от друга, определите, во сколько раз увеличилась электрическая энергия системы.

Решение.

При слиянии ртутных шариков сохраняется их суммарный заряд и объем:

$$Nq = Q,$$

$$N(4/3)\pi r^3 = (4/3)\pi R^3,$$

где Q – заряд шара, R – его радиус, r – радиус каждого маленького ртутного шарика. Суммарная электрическая энергия N уединенных шариков равна

$$W_1 = N\frac{q^2}{8\pi\varepsilon_0 r}.$$

Электрическая энергия полученного в результате слияния шара

$$W_2 = \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0 R}.$$

После алгебраических преобразований получим

$$W_2 / W_1 = N^{2/3} = 4.$$

Пример 6.

Металлический шарик радиуса $R = 1$ мм и заряда $q = 0{,}1$ нКл с большого расстояния медленно приближают к незаряженному проводнику и останавливают, когда потенциал шарика становится равным $\varphi = 450$ В. Какую работу для этого следует совершить?

Решение.

Электрическая энергия системы из двух заряженных проводников определяется формулой

$$W = \frac{1}{2}(q_1\varphi_1 + q_2\varphi_2),$$

где q_1 и q_2 – заряды проводников, φ_1 и φ_2 – их потенциалы. Так как проводник по условию задачи не заряжен, то

$$W = \frac{1}{2}q_1\varphi_1,$$

где q_1 и φ_1 заряд и потенциал шара. Когда шар и незаряженный проводник находятся на большом расстоянии друг от друга,

$$\varphi_1 = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R},$$

и электрическая энергия системы

$$W_1 = \frac{q^2}{8\pi\varepsilon_0 R}.$$

В конечном состоянии системы, когда потенциал шара стал равным φ, электрическая энергия системы:

$$W_2 = \frac{q\varphi}{2}.$$

Работа внешних сил равна приращению электрической энергии:

$$A = W_2 - W_1 = \frac{q\varphi}{2} - \frac{q^2}{8\pi\varepsilon_0 R} = -0{,}0225 \text{ мкДж}.$$

Заметим, что электрическое поле в конечном состоянии системы создается зарядами, индуцированными на проводнике, а также зарядами, неоднородно распределенными по поверхности металлического шара. Рассчитать это поле при известной геометрии проводника и заданном положении металлического шара весьма непросто. Нам не потребовалось этого делать, поскольку в задаче задана не геометрическая конфигурация системы, а потенциал шара в конечном состоянии.

Пример 7.

Система состоит из двух концентрических тонких металлических оболочек с радиусами R_1 и R_2 ($R_1 < R_2$) и соответствующими зарядами q_1 и q_2. Найдите электрическую энергию W системы. Рассмотрите также специальный случай, когда $q_2 = -q_1$.

Решение.

Электрическая энергия системы из двух заряженных проводников определяется формулой

$$W = \frac{1}{2}\left(q_1\varphi_1 + q_2\varphi_2\right).$$

Для решения задачи необходимо найти потенциалы внутренней (φ_1) и внешней (φ_2) сфер. Это нетрудно сделать (см. соответствующий раздел пособия):

$$\varphi_1 = \frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 R_1} + \frac{q_2}{4\pi\varepsilon_0 R_2}, \quad \varphi_2 = \frac{(q_1 + q_2)}{4\pi\varepsilon_0 R_2}.$$

Подставляя эти выражения в формулу для энергии, получим

$$W = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q_1^2}{2R_1} + \frac{q_2^2}{2R_2} + \frac{q_1 q_2}{R_2}\right).$$

При $q_2 = -q_1$ энергия равна

$$W = \frac{q^2}{8\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right).$$

Собственная электрическая энергия и энергия взаимодействия

Пример 8.

Две проводящие сферы, заряды которых q и $-q$, радиусы R_1 и R_2, расположены в вакууме на большом расстоянии друг от друга. Сфера большего радиуса R_2 состоит из двух полусфер. Полусферы разъединяют, подносят их к сфере радиуса R_1, и вновь соединяют, образуя таким образом сферический конденсатор. Определите работу электрических сил при таком составлении конденсатора.

Решение.

Электрическая энергия двух удаленных друг от друга заряженных сфер равна

$$W_1 = \frac{q^2}{8\pi\varepsilon_0 R_1} + \frac{q^2}{8\pi\varepsilon_0 R_2}.$$

Электрическая энергия полученного сферического конденсатора:

$$W_2 = \frac{1}{2}\left(q\varphi_1 - q\varphi_2\right),$$

где

$$\varphi_1 = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R_1} - \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R_2}$$

- потенциал внутренней сферы, $\varphi_2 = 0$ - потенциал внешней сферы. Следовательно,

$$W_2 = \frac{q^2}{8\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)$$

Работа электрических сил при таком составлении конденсатора:

$$A = W_1 - W_2 = q^2 / 4\pi\varepsilon_0 R_2.$$

Заметим, что электрическая энергия сферического конденсатора W_2 равна работе внешних сил по зарядке конденсатора. При этом электрические силы совершают работу $A_{\text{эл}} = -W_2$. Эта работа совершается не только при сближении заряженных обкладок, но и при нанесении заряда на каждую из обкладок. Поэтому $A_{\text{эл}}$ отличается от найденной выше работы A, совершенной электрическими силами только при сближения обкладок.

Пример 9.

Точечный заряд $q = 1{,}5$ мкКл расположен в центре сферической оболочки, по поверхности которой однородно распределен заряд $Q = 5$ мкКл. Найдите работу электрических сил при расширении оболочки – увеличении ее радиуса от $R_1 = 50$ мм до $R_2 = 100$ мм.

Решение.

Энергия взаимодействия точечного заряда q с зарядами, расположенными на сферической оболочке радиуса R равна

$$W_1 = \sum_i \frac{q\Delta Q_i}{4\pi\varepsilon_0 R} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R}\sum_i \Delta Q_i = \frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0 R},$$

Собственная электрическая энергия оболочки (энергия взаимодействия зарядов оболочки между собой) равна:

$$W_2 = \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0 R}\ .$$

Работа электрических сил при расширении оболочки:

$$A = \left(\frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0 R_1} + \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0 R_1}\right) - \left(\frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0 R_2} + \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0 R_2}\right).$$

После преобразований получим

$$A = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(q + \frac{Q}{2}\right)\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right) = 1{,}8\ \text{Дж.}$$

Другой способ решения

Точечный заряд представим в виде однородно заряженной сферы малого радиуса r и заряда q. Полная электрическая энергия системы равна

$$W = \frac{1}{2}(q\varphi_r + Q\varphi_R),$$

где

$$\varphi_r = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r} + \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R}$$

- потенциал сферы радиуса r,

$$\varphi_R = \frac{q + Q}{4\pi\varepsilon_0 R}$$

- потенциал сферы радиуса R. При расширении внешней сферы электрические силы совершают работу

$$A = W(R_1) - W(R_2)\ .$$

После подстановок и преобразований получим ответ.

Объемная плотность энергии электрического поля

Пример 10.

Какая часть электрической энергии заряженного проводящего шара, расположенного в вакууме, заключена в пределах концентрической с шаром воображаемой сферы, радиус которой в n раз больше радиуса шара?

Решение.

Объемная плотность энергии электрического поля

$$w = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 E^2}{2}$$

определяет электрическую энергию $dW = wdV$, локализованную в бесконечно малом объеме dV (E – модуль вектора напряженности электрического поля в этом объеме, ε - диэлектрическая проницаемость). Чтобы вычислить полную электрическую энергию заряженного проводящего шара, мысленно разобьем все пространство на бесконечно тонкие шаровые слои, концентрические с заряженным шаром. Рассмотрим один из таких слоев радиуса r и толщины dr (см. рис.5). Его объем равен

$$dV = 4\pi r^2 dr,$$

а сосредоточенная в слое электрическая энергия

$$dW = w \cdot 4\pi r^2 dr = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 E^2}{2} \cdot 4\pi r^2 dr.$$

Напряженность E поля заряженного проводящего шара зависит, как известно, от расстояния r до центра шара. Внутри шара $E = 0$, поэтому при вычислении энергии достаточно рассматривать только те шаровые слои, радиус r которых превышает радиус шара R.

При $r > R$ напряженность поля

$$E = \frac{|q|}{4\pi\varepsilon_0 r^2},$$

диэлектрическая проницаемость $\varepsilon = 1$ и, следовательно

$$dW = \frac{\varepsilon_0 E^2}{2} 4\pi r^2 dr = \frac{q^2}{8\pi\varepsilon_0 r^2} dr,$$

где q – заряд шара.

Полная электрическая энергия заряженного шара, определяется интегралом

$$W_{\text{п}} = \int_R^{\infty} \frac{q^2}{8\pi\varepsilon_0 r^2} dr = \frac{q^2}{8\pi\varepsilon_0 R},$$

а энергия, сосредоточенная внутри воображаемой сферы радиуса nR, равна

$$W = \int_R^{nR} \frac{q^2}{8\pi\varepsilon_0 r^2} dr = \frac{q^2}{8\pi\varepsilon_0 R}\left(\frac{n-1}{n}\right).$$

Следовательно,

$$\frac{W}{W_{\text{п}}} = \frac{n-1}{n}.$$

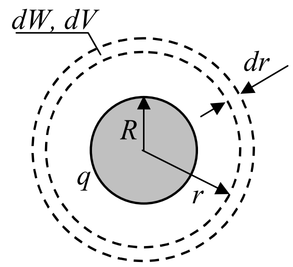

Рис.5

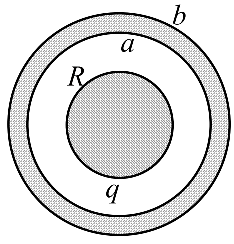

Рис.6

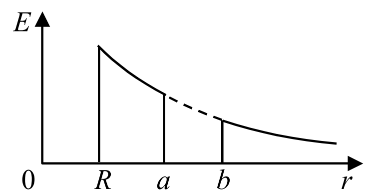

Рис.7

Пример 11.

Определите электрическую энергию системы, состоящей из заряженного проводящего шара и концентрического с ним незаряженного проводящего шарового слоя (рис.6). Внутренний и внешний радиусы слоя a и b, радиус шара $R < a$, заряд q, система находится в вакууме.

Решение.

На внутренней и внешней поверхностях шарового слоя распределены индуцированные заряды. Их алгебраическая сумма равна нулю, поэтому индуцированные заряды не создают электрического поля при $r > b$, где r – расстояние от центра системы. В области $r < a$ напряженность поля индуцированных зарядов также равна нулю, поскольку они однородно распределены по сферическим поверхностям. Таким образом, электрическое поле системы совпадает с полем однородно заряженной по поверхности сферы, за исключением внутренней области шарового слоя, где $E = 0$. На рис.7 приведен примерный график зависимости $E(r)$. Опуская подробные выкладки (см. пример 10), запишем для электрической энергии системы:

$$W = \int_R^a w dV + \int_b^\infty w dV ,$$

где $dV = 4\pi r^2 dr$, $w = (\varepsilon_0 E^2)/2$, $E = |q| / 4\pi\varepsilon_0 r^2$. После интегрирования получим

$$W = \frac{q^2}{8\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right).$$

Пример 12.

Первоначально заряд q распределен однородно по объему шара радиуса R. Затем вследствие взаимного отталкивания заряды переходят на поверхность шара. Какую работу совершают при этом электрические силы? Диэлектрическую проницаемость считайте равной единице.

Решение.

Работа электрических сил равна убыли электрической энергии:

$$A = W_1 - W_2 ,$$

где W_1 – электрическая энергия однородно заряженного по объему шара, W_2 – энергия того же шара, однородно заряженного по поверхности. Поскольку суммарный заряд в обоих случаях одинаков, то электрическое поле вне шара при переходе заряда из объема на поверхность не изменяется. Электрическое поле и энергия изменяются только внутри шара.
При помощи теоремы Гаусса можно вывести формулу для напряженности поля внутри однородно заряженного шара на расстоянии r от его центра:

$$E = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{r}{R^3}.$$

Электрическая энергия, сосредоточенная внутри шара, определяется интегралом:

$$W_{1\,\text{внутр}} = \int_0^R \frac{\varepsilon_0 E^2}{2} \cdot 4\pi r^2 dr = \frac{q^2}{40\pi\varepsilon_0 R}.$$

Когда все заряды перешли на поверхность шара, электрическое поле, а следовательно, и энергия электрического поля внутри шара стали равными нулю. Таким образом,

$$A = W_1 - W_2 = W_{1\,\text{внутр}} = \frac{q^2}{40\pi\varepsilon_0 R}.$$