5. Проводники в электростатическом поле

(примеры решения задач)

<u>Напряженность поля внутри проводника равна нулю</u>

<u>Пример 5.1.</u>

В однородное электрическое поле $\vec{E}_0$ перпендикулярно силовым линиям внесли тонкую заряженную металлическую пластину. При этом на поверхности пластины, в которую «входят» силовые линии, плотность заряда оказалась равной σ_1. Найдите поверхностную плотность заряда на другой поверхности пластины.

<u>Решение</u>.

Рассмотрим произвольную точку A внутри проводника (рис. 1). Поле в этой точке складывается из внешнего поля $\vec{E}_0$ и полей поверхностных зарядов σ_1 и σ_2:

$$\vec{E}_{\text{в проводнике}} = \vec{E}_0 + \vec{E}_1 + \vec{E}_2 \ .$$

Изобразим на рисунке векторы напряженности $\vec{E}_0$, $\vec{E}_1$ и $\vec{E}_2$, предполагая, что $\sigma_1 > 0$ и $\sigma_2 > 0$ Учитывая, что напряженность поля в проводнике равна нулю, запишем для проекций векторов напряженности на ось x:

$$0 = E_0 + E_1 - E_2 \ .$$

Поля $\vec{E}_1$ и $\vec{E}_2$ созданы бесконечными однородно заряженными плоскостями, следовательно

$$E_1 = \frac{\sigma_1}{2\varepsilon_0}\ , \quad E_2 = \frac{\sigma_2}{2\varepsilon_0}\ .$$

После простых преобразований получим

$$\sigma_2 = \sigma_1 + 2\varepsilon_0 E_0\ .$$

Если знак поверхностных зарядов не известен (как в данном случае), всегда можно изображать на рисунке векторы $\vec{E}_1$, $\vec{E}_2$, предполагая, что σ_1 и σ_2 положительны. Нетрудно показать, что полученные формулы будут справедливы и для произвольных знаков σ_1 и σ_2.

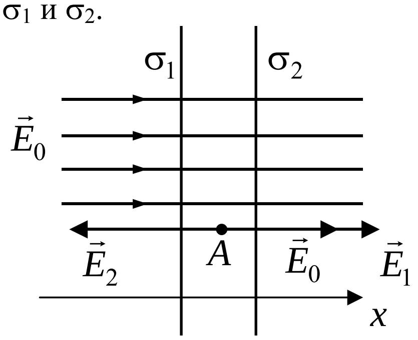

Рис. 1

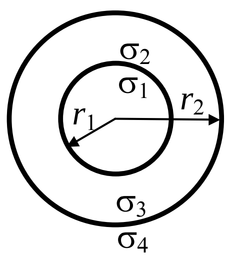

Рис. 2

<u>Пример 5.2.</u>

Две концентрические проводящие сферы имеют радиусы r_1, r_2 и заряды q, $-2q$. Найдите поверхностные плотности заряда $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4$ на внутренней и внешней поверхностях каждой сферы (рис. 2).

<u>Решение</u>.

Внутри проводника напряженность электрического поля равна нулю. Рассмотрим некоторую точку, расположенную внутри «стенки» внешней сферы на расстоянии r от центра сфер. Электрическое поле в этой точке создают только те заряды, которые расположены внутри сферической поверхности радиуса r, то есть заряды с плотностями σ_1, σ_2 и σ_3. Следовательно:

$$E = \frac{S_2\sigma_3 + S_1(\sigma_2 + \sigma_1)}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = 0,$$

где $S_2 = 4\pi r_2^2$, $S_1 = 4\pi r_1^2$ - площади поверхности сфер. Аналогично, рассматривая точку, расположенную внутри «стенки» внутренней сферы, получим

$$E = \frac{S_1\sigma_1}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = 0 \ .$$

Учтем также, что

$$S_1(\sigma_1 + \sigma_2) = q,$$

$$S_2(\sigma_3 + \sigma_4) = -2q.$$

В результате получим: $\sigma_1 = 0$, $\sigma_2 = q/4\pi r_1^2$, $\sigma_3 = \sigma_4 = -q/4\pi r_2^2$.

Потенциал во всех точках проводника одинаков

Пример 5.3.

Два металлических шара, радиусы которых r_1 и r_2, расположены на большом расстоянии друг от друга и соединены тонкой проволокой. Суммарный заряд шаров Q. Определите заряд каждого шара.

Решение.

Обозначим заряды шаров q_1 и q_2. Поскольку шары расположены далеко друг от друга, можно считать, что заряды распределены по поверхностям шаров однородно. Тогда для потенциалов шаров можно записать

$$\varphi_1 = \frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 r_1}, \quad \varphi_2 = \frac{q_2}{4\pi\varepsilon_0 r_2} \ .$$

Эти потенциалы равны друг другу, так как шары соединены проводником:

$$\varphi_1 = \varphi_2 .$$

Учитывая, что

$$q_1 + q_2 = Q,$$

найдем

$$q_1 = Q\frac{r_1}{r_1 + r_2}, \qquad q_2 = Q\frac{r_2}{r_1 + r_2} .$$

Пример 5.4.

Имеются две концентрические металлические сферы, в центре которых находится точечный заряд q. Заряд меньшей сферы $3q$, заряд больше сферы ($-2q$). Определите заряд каждой сферы после того, как их соединят тонкой проволокой.

Решение.

После соединения сфер заряды распределятся так, что потенциалы сфер будут одинаковыми:

$$\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R_1} + \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 R_1} + \frac{Q_2}{4\pi\varepsilon_0 R_2} = \frac{q + Q_1 + Q_2}{4\pi\varepsilon_0 R_2},$$

где Q_1 и R_1 – заряд и радиус внутренней сферы, Q_2 и R_2 – заряд и радиус внешней сферы. Из этого уравнения следует $Q_1 = -q$. Суммарный заряд сфер после их соединения не изменился:

$$3q - 2q = Q_1 + Q_2 .$$

Следовательно, $Q_2 = 2q$.

Пример 5.5.

Найдите потенциал незаряженной проводящей сферы, вне которой на расстоянии l от ее центра находится точечный заряд q. Потенциал в бесконечно удаленной точке, как обычно, считайте равным нулю.

Решение.

На поверхности проводящей сферы индуцируются заряды ΔQ_i, распределенные по поверхности так, что напряженность электрического поля внутри сферы равна нулю. При этом потенциалы во всех точках, расположенных внутри и на поверхности проводящей сферы, одинаковые. Найдем потенциал в центре сферы:

$$\varphi = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 l} + \sum \frac{\Delta Q_i}{4\pi\varepsilon_0 R},$$

где R – радиус сферы. Суммарный заряд сферы равен нулю: $\sum \Delta Q_i = 0$, поэтому

$$\varphi = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 l} .$$

Метод электростатических изображений

Пример 5.6.

Точечные заряды q и $-q$ расположены на расстоянии $2l$ друг от друга и на одинаковом расстоянии l от бесконечной проводящей плоскости с одной стороны от нее. Определите поверхностную плотность индуцированных зарядов в точке на плоскости, расположенной на минимальном расстоянии от заряда q.

Решение.

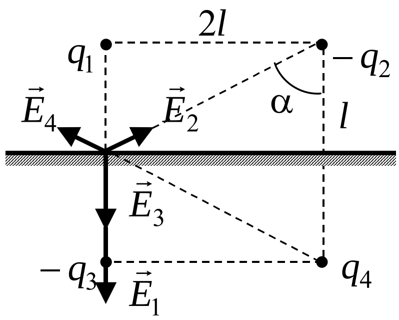

Рис. 3

На рис. 3 для удобства дальнейших объяснений заряды снабдим индексами. Модули всех зарядов равны q. Заряды q_1 и ($-q_2$) – это исходные заряды q и $-q$, расположенные вблизи проводящей плоскости. Заряд ($-q_3$) – «изображение» заряда q_1. Этот фиктивный заряд создает в верхнем полупространстве такое же поле, что и заряды, индуцированные на плоскости зарядом q_1. Аналогично заряд q_4 – это «изображение» заряда ($-q_2$).
Заряды q_1 и $-q_3$ создают в интересующей нас точке поля

$$E_1 = E_3 = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 l^2},$$

а заряды ($-q_2$) и q_4 создают в этой точке поля

$$E_2 = E_4 = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 \cdot 5l^2}.$$

Результирующее поле $\vec{E}$ перпендикулярно проводящей плоскости, а его модуль равен

$$E = 2E_1 - 2E_2\cos\alpha,$$

где

$$\cos\alpha = \frac{l}{l\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}}.$$

Таким образом,

$$E = \frac{q}{2\pi\varepsilon_0 l^2}\left(1 - \frac{1}{5\sqrt{5}}\right).$$

Поверхностную плотность индуцированных зарядов найдем при помощи формулы $E_n = \sigma/\varepsilon_0$:

$$\sigma = \varepsilon_0 E_n = -\varepsilon_0 E = -\frac{q}{2\pi l^2}\left(1 - \frac{1}{5\sqrt{5}}\right).$$