Дифракция Френеля

Примеры решения задач

Пример 1.

Между точечным источником света и экраном поместили диафрагму с круглым отверстием, радиус которого r можно менять. Расстояния от диафрагмы до источника и экрана равны $a = 100$ см и $b = 125$ см. Определите длину волны света, если максимум освещенности в центре дифракционной картины на экране наблюдается при $r_1 = 1$ мм, и следующий максимум – при $r_2 = 1{,}29$ мм.

Решение.

При решении воспользуемся методом, основанным на построении зон Френеля.

1. Волновую поверхность сферической волны от точечного источника S разобьем на так называемые зоны Френеля - кольцевые зоны, построенные так, что расстояние от точки наблюдения P до внешних границ этих зон увеличивается с шагом $\lambda/2$, начиная от минимального значения $b + (\lambda/2)$ (рис. 1). Можно показать, что при не очень больших номерах зон Френеля их площади практически одинаковы, а радиус m-ой зоны определяется выражением

$$r_m = \sqrt{\frac{ab\lambda m}{a+b}}.$$

где a и b - расстояния от волновой поверхности до источника S и точки наблюдения P.

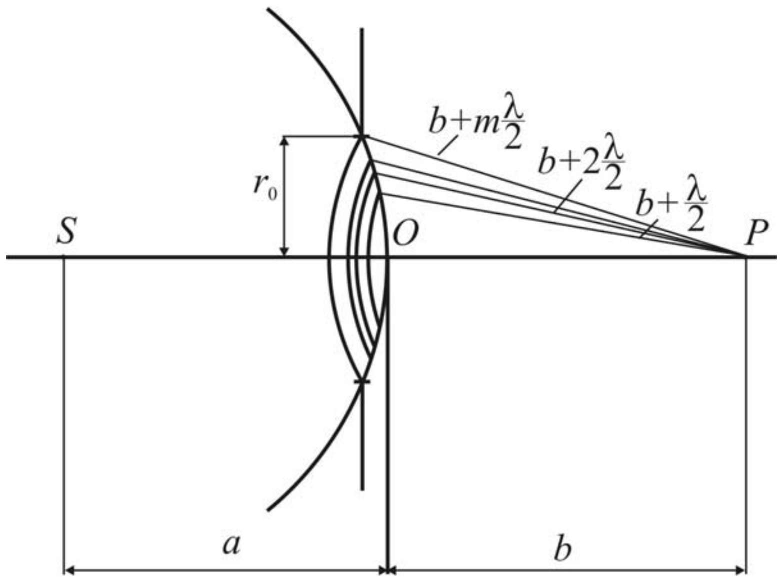

Рис.1

Далее каждую зону Френеля разобьем на очень узкие кольцевые подзоны так, что расстояние от каждой следующей подзоны до точки P увеличивается с постоянным шагом Δr.

2. Согласно принципу Гюйгенса-Френеля точки волновой поверхности являются источниками вторичных когерентных волн, которые возбуждают колебания в точке наблюдения P. Колебания в точке P от отдельных кольцевых подзон имеют примерно одинаковые амплитуды и для соседних подзон сдвинуты по фазе на величину $\Delta\varphi = 2\pi\Delta r/\lambda$.

3. Просуммируем колебания методом векторных диаграмм, отображая амплитуду колебаний, возбуждаемых в P каждой подзоной, в виде вектора. Фазовый сдвиг учтем, поворачивая на угол $\Delta\varphi$ каждый следующий вектор относительно предыдущего. Модули векторов слабо уменьшаются с увеличением номера подзоны, что связано со слабым уменьшением площади подзон и с увеличением угла между нормалью к волновой поверхности в данной подзоне и направлением на точку P. В результате получим векторную диаграмму в виде спирали (рис.2), которая называется спиралью Френеля.

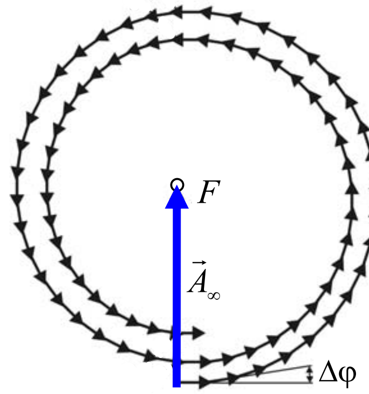

Рис.2.

4. Амплитуда результирующих колебаний определяется модулем суммы векторов. По мере увеличения числа подзон результирующий вектор описывает своим концом спираль, которая в случае полностью открытой волновой поверхности сходится к точке F; при этом амплитуда колебания в точке P равна A_∞.

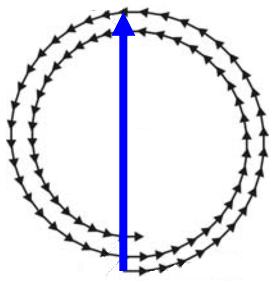	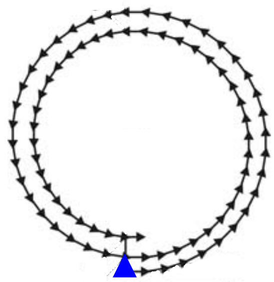
Рис.3. Открыта первая зона Френеля	Рис.4. Открыты первая и вторая зоны Френеля
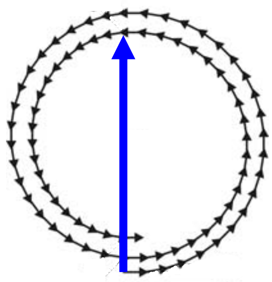	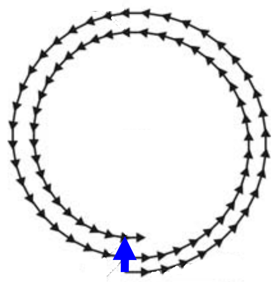
Рис.5. Открыты первые три зоны Френеля	Рис.6. Открыты первые четыре зоны Френеля

5. Когда радиус отверстия r_0 равен радиусу первой зоны Френеля для точки наблюдения P, отверстие открывает вторичные источники, возбуждающие в точке P колебания, последнее из которых сдвинуто по фазе относительно первого на π. Соответствующая векторная диаграмма изображена на рис.3. Видно, что в этом случае амплитуда колебаний в точке P в 2 раза, а интенсивность в 4 раза больше, чем в случае, когда открыт весь волновой фронт ($r_0 \to \infty$).

Когда радиус отверстия равен радиусу второй зоны Френеля, колебания вторичных источников первой и второй зон Френеля гасят друг друга (рис.4). При дальнейшем увеличении радиуса отверстия интенсивность света в точке P будет периодически изменяться, достигая максимума, когда открыто нечетное число зон Френеля и минимума, когда открыто четное число зон (рис.5, 6).

6. В данной задаче

$$r_1 = \sqrt{\frac{ab\lambda(2m+1)}{a+b}},$$

$$r_2 = \sqrt{\frac{ab\lambda(2m+3)}{a+b}},$$

где m - целое положительное число. Решая эту систему, найдем

$$\lambda = \frac{\left(r_2^2 - r_1^2\right)(a+b)}{2ab} = 0{,}6 \text{ мкм.}$$

<u>Пример 2.</u>

Плоская монохроматическая световая волна с интенсивностью I_0 падает нормально на непрозрачный экран с круглым отверстием. Какова интенсивность света за экраном в точке, для которой отверстие:

А) равно первой зоне Френеля,

Б) равно внутренней половине первой зоны Френеля,

В) сделали равным первой зоне Френеля и затем закрыли его половину (по диаметру)?

<u>Решение.</u>

А) См. рис.7: $A_1 = 2A_\infty$, $I_1 = 4I_\infty$, где A_∞ и I_∞ - амплитуда и интенсивность в точке наблюдения, когда нет преграды,

Б) См. рис. 8: $A_2 = A_\infty\sqrt{2}$, $I_2 = 2I_\infty$,

В) Если закрыть половину отверстия по диаметру, то площадь каждой подзоны уменьшится в 2 раза, поэтому и амплитуда каждого колебания уменьшится в 2 раза при неизменном фазовом сдвиге. Следовательно, и векторная диаграмма должна уменьшиться в 2 раза: $A_3 = A_\infty$, $I_3 = I_\infty$ (рис.9).

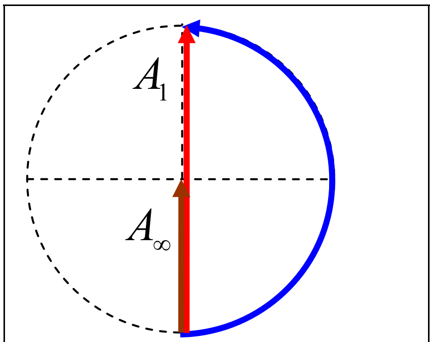

Рис.7.

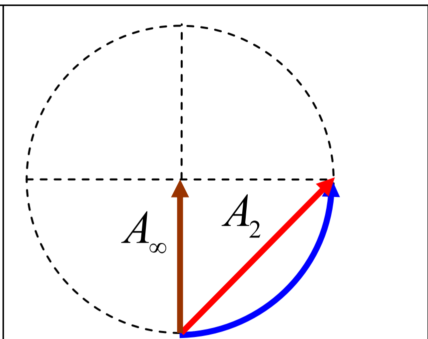

Рис.8.

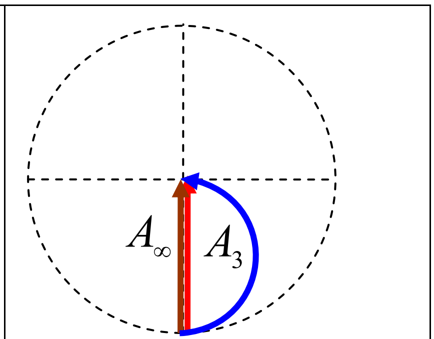

Рис.9.

<u>Пример 3.</u>

Плоская монохроматическая световая волна с интенсивностью I_0 падает нормально на непрозрачный диск, закрывающий для точки наблюдения P первую зону Френеля.

Какова стала интенсивность света I в точке P после того, как у диска удалили (по диаметру):

А) половину,

Б) половину внешней половины первой зоны Френеля?

Решение.

А) Показанный на рис. 10 вектор A_1 - амплитуда колебаний, возбуждаемых в точке наблюдения вторичными источниками всех зон Френеля, кроме первой, которая закрыта диском. На рис. 11 показана также амплитуда A_2 колебаний, возбуждаемых вторичными источниками, расположенными на половине (по диаметру) первой зоны Френеля. Видно, что $\vec{A}_1 + \vec{A}_2 = 0$ (более строго: $|\vec{A}_1 + \vec{A}_2| << A_\infty$).

Б) На рис. 12 вектор A_3 - амплитуда колебаний от вторичных источников, расположенных на половине внешней половины первой зоны Френеля. Видно, что $|\vec{A}_1 + \vec{A}_3| = A_\infty / \sqrt{2}$. Соответствующая интенсивность равна $I_\infty / 2$.

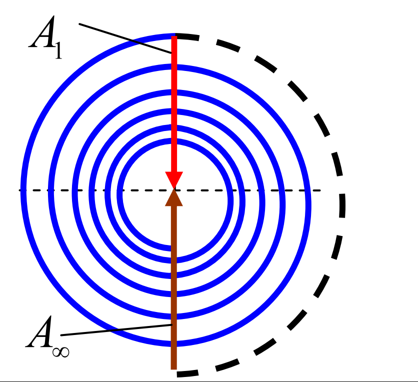

Рис. 10

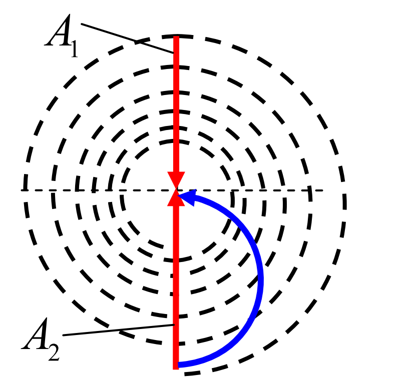

Рис. 11

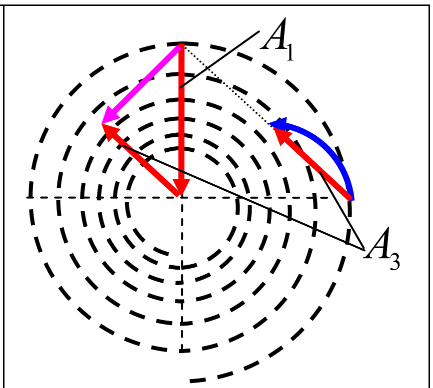

Рис. 12

Пример 4.

Плоская световая волна с длиной волны $\lambda = 0{,}6$ мкм падает нормально на достаточно большую стеклянную пластинку, на противоположной стороне которой сделана выемка (рис. 13). Для точки наблюдения P она представляет собой первые полторы зоны Френеля. Найдите глубину h выемки, при которой интенсивность света в точке P будет максимальной.

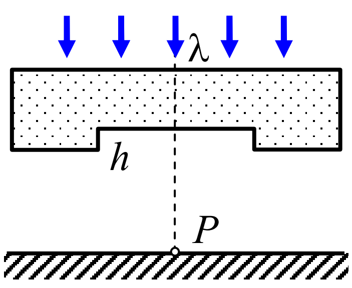

Рис. 13

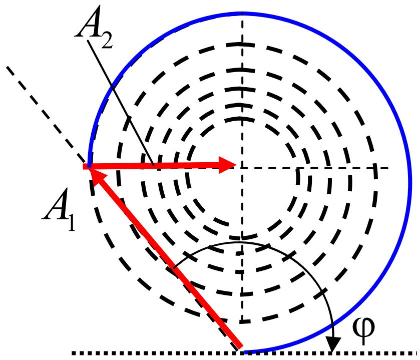

Рис. 14

Решение.

На рис. 14 вектор A_1 отображает колебания, возбуждаемые в точке P вторичными источниками, расположенными на целой (без выемки) пластинке в пределах первых полутора зон Френеля, вектор A_2 - амплитуда колебаний остальных источников, лежащих на поверхности целой пластины.

«Изготовление» выемки приводит к повороту вектора $\vec{A}_1$ по часовой стрелке на угол $\varphi = \dfrac{2\pi}{\lambda}(n-1)h$, что учитывает отрицательный фазовый сдвиг для волн, распространяющихся от дна выемки до точки наблюдения P: ранее эти волны распространялись в стекле толщиной h, а теперь, после изготовления выемки, в воздухе. Из рис. 14 видно, что для получения максимальной интенсивности в точке P угол φ должен быть равен

$$\varphi = \frac{3}{4}\pi + 2\pi m,$$

где $m = 0, 1, 2, \ldots$ После преобразований получим ответ

$$h = \left(\frac{3}{8} + m\right)\frac{\lambda}{n-1}.$$

<u>Пример 5.</u>

Свет с λ =0,60 мкм падает нормально на поверхность стеклянного диска, который перекрывает полторы зоны Френеля для точки наблюдения P. При какой толщине этого диска интенсивность света в точке P будет максимальной?

<u>Решение</u>.

Предполагая сначала, что диск имеет бесконечно малую толщину, покажем на спирали Френеля (рис. 15) вектор $\vec{A}_{1,5}$, который соответствует суммарному вкладу в амплитуду результирующего колебания первых полутора зон. Вклад от остальных зон определяется вектором $\vec{A}_{ост}$. Амплитуда колебания в точке P пропорциональна вектору $\vec{A}_\infty$, равному

$$\vec{A}_\infty = \vec{A}_{1,5} + \vec{A}_{ост}.$$

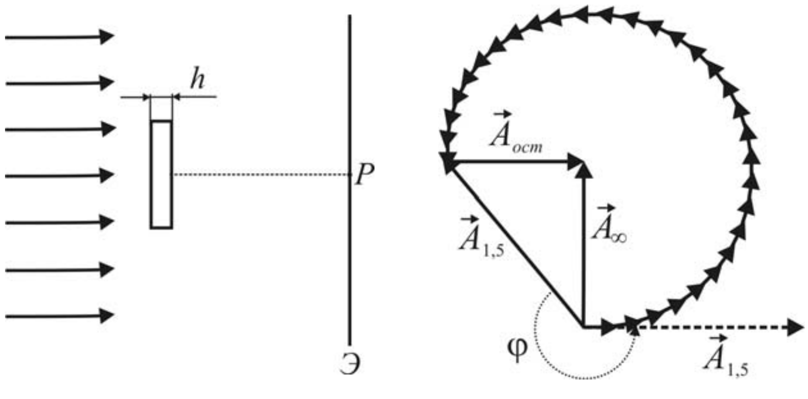

Рис. 15

Если толщина диска становится конечной, падающая волна достигает плоскости, совмещенной с выходной поверхностью диска, с разными значениями фаз в области диска и вне ее, что обусловлено различиями в скорости распространения света в стекле и в воздухе. Вследствие этого с ростом толщины диска вторичные волны, испускаемые с его поверхности, отстают по фазе от значений, соответствующих бесконечно тонкому диску. Величина отставания по фазе связана с толщиной диска h соотношением

$$\varphi = \frac{2\pi}{\lambda}(n-1)h\,,$$

где n - показатель преломления стекла.

При построении спирали Френеля отставанию по фазе соответствует поворот элементарного вектора против часовой стрелки. Следовательно, с ростом толщины стеклянного диска вектор $\vec{A}_{1,5}$ поворачивается против часовой стрелки. Интенсивность в точке P будет максимальна тогда, когда вектор $\vec{A}_{1,5}$ будет сонаправлен вектору $\vec{A}_{ост}$. Для этого вектор $\vec{A}_{1,5}$ должен повернуться на угол

$$\varphi = \frac{5}{4}\pi + 2\pi m\,,$$

где $m = 0$, 1, 2, … После преобразований получим:

$$h = \frac{\lambda}{n-1}\left(\frac{5}{8} + m\right).$$