Электромагнитные волны

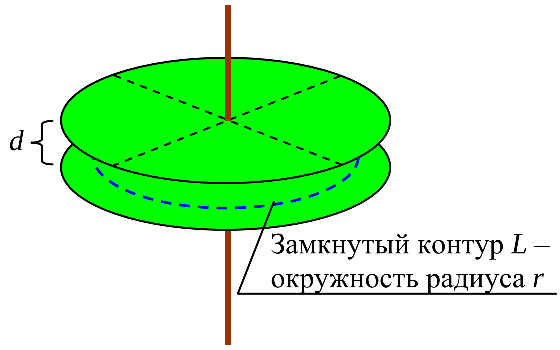
Примеры решения задач

Пример 1.

Плоский конденсатор состоит из двух одинаковых металлических дисков, пространство между которыми заполнено однородным диэлектриком с диэлектрической проницаемостью ε. Расстояние между внутренними поверхностями дисков равно *d*. Между обкладками конденсатора поддерживается переменное напряжение $U = U_m \sin \omega t$.

Пренебрегая краевыми эффектами, найдите магнитное поле $\vec{H}$ в пространстве между обкладками конденсатора.

Решение.



Воспользуемся теоремой о циркуляции вектора $\vec{H}$ с учетом тока смещения:

$$\oint_L \vec{H} d\vec{l} = \int_S \left(\vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) d\vec{S},$$

где L - замкнутый контур, S - поверхность ограниченная этим контуром, $\vec{j}$ - плотность тока проводимости, $\partial \vec{D} / \partial t$ - плотность тока смещения, $\vec{D} = \varepsilon\varepsilon_0 \vec{E}$, $\vec{E}$ - вектор напряженности электрического поля, $\vec{H} = \vec{B} / \mu\mu_0$, $\vec{B}$ - вектор индукции магнитного поля. В качестве контура L выберем окружность радиуса r, центр которой лежит на оси системы между металлическими дисками. Будем считать, что $r < R$, где R - радиус дисков. В качестве поверхности S выберем плоскую поверхность, ограниченную контуром L, то есть круг радиуса r.

Плотность тока проводимости во всех точках этой поверхности равна нулю ($\vec{j} = 0$), а вектор напряженности $\vec{E}$ перпендикулярен этой поверхности, причем $E = U / d$. Поэтому поверхностный интеграл в теореме о циркуляции равен

$$\int_S \left(\vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) d\vec{S} = \int_S \frac{\varepsilon\varepsilon_0}{d} \omega U_m \cos \omega t \, dS = \frac{\varepsilon\varepsilon_0}{d} \omega U_m \cos \omega t \, \pi r^2 .$$

В силу симметрии магнитные линии имеют форму коаксиальных окружностей с общей осью, совпадающей с осью конденсатора. Поэтому:

$$\oint_L \vec{H} d\vec{l} = H \oint_L dl = H 2\pi r .$$

Окончательно получим: $H = \dfrac{\varepsilon\varepsilon_0 \omega r}{2d} U_m \cos \omega t$.

Пример 2.

Электромагнитная волна переходит из вакуума в немагнитный диэлектрик с диэлектрической проницаемостью ε. При этом амплитуда колебаний вектора напряженности электрического поля уменьшилась в *m* раз. Во сколько раз уменьшилась амплитуда колебаний вектора магнитной индукции.

Решение

Амплитуды колебаний векторов напряженности $\vec{E}_m$ и индукции $\vec{B}_m$ в электромагнитной волне связаны соотношением

$$E_m = \upsilon B_m,$$

где $\upsilon = c/\sqrt{\mu\varepsilon}$ - фазовая скорость волны. Записывая это соотношение для вакуума

$$E_{m1} = cB_{m1}$$

и для немагнитной ($\mu = 1$) среды

$$E_{m2} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon}} B_{m2},$$

получим после простых преобразований $B_1 / B_2 = m/\sqrt{\varepsilon}$.

Пример 3.

В вакууме в положительном направлении оси X распространяется плоская электромагнитная волна частотой $\omega = 3\cdot10^9$ с$^{-1}$. В некоторый момент времени в точке с координатами (0,1 м, 0,2 м, 0,3 м) фаза колебаний вектора напряженности электрического поля равна $\varphi_1 = \pi$. Определите в этот момент времени фазу колебаний φ_2 вектора магнитной индукции в точке с координатами (0,2 м, 0,4 м, 0,6 м).

Решение

В плоской электромагнитной волне колебания векторов $\vec{E}$ и $\vec{B}$ в точке, определяемой вектором $\vec{r}$, описываются формулами:

$$\vec{E} = \vec{E}_m \cos\left(\omega t - \vec{k}\vec{r} + \alpha\right),$$

$$\vec{B} = \vec{B}_m \cos\left(\omega t - \vec{k}\vec{r} + \alpha\right),$$

где $\vec{k}$ - волновой вектор, $|\vec{k}| = 2\pi/\lambda = \omega/c$, α - начальная фаза колебаний. Вычислим скалярное произведение $\vec{k}\vec{r}$, учитывая, что при распространении волны вдоль оси X $k_y = k_z = 0$:

$$\vec{k}\vec{r} = k_x r_x + k_y r_y + k_z r_z = k_x r_x = kx.$$

Отсюда:

$$\varphi_1 = \omega t - kx_1 + \alpha,$$

$$\varphi_2 = \omega t - kx_2 + \alpha,$$

и

$$\varphi_2 = \varphi_1 - k(x_2 - x_1) = \varphi_1 - (\omega/c)(x_2 - x_1) = \pi - 1.$$

Пример 4.

Максимальное значение модуля вектора напряженности электрического поля плоской монохроматической электромагнитной волны в вакууме равно E_m. Определите интенсивность волны (среднее значение модуля вектора Пойнтинга).

Решение

В плоской электромагнитной волне

$$\vec{E} = \vec{E}_m \cos(\omega t - \vec{k}\vec{r}), \quad \vec{B} = \vec{B}_m \cos(\omega t - \vec{k}\vec{r}),$$

где векторы $\vec{E}_m$, $\vec{B}_m$ и $\vec{k}$ взаимно перпендикулярны, $E_m = cB_m$ и $\varepsilon_0\mu_0 = 1/c^2$. Вектор Пойнтинга (вектор плотности потока энергии) равен

$$\vec{S} = [\vec{E}\vec{H}],$$

где $\vec{H} = \vec{B}/\mu\mu_0$ (в вакууме $\mu = 1$). Учитывая ортогональность векторов $\vec{E}$ и $\vec{H}$, получим для модуля вектора Пойнтинга:

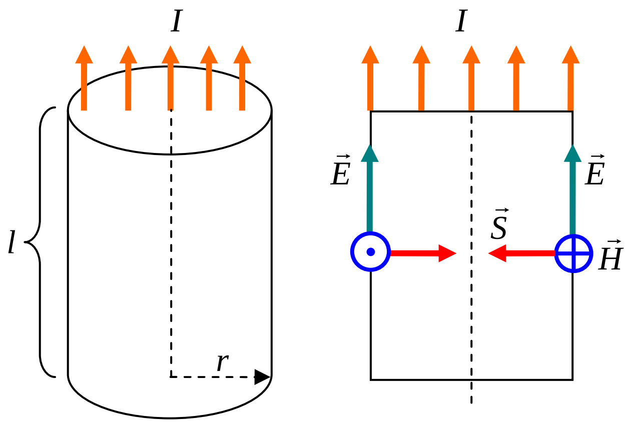
$$\left|\vec{S}\right| = E_m (B_m/\mu_0)\cos^2\left(\omega t - \vec{k}\vec{r}\right) = \frac{E_m^2}{c\mu_0}\cos^2\left(\omega t - \vec{k}\vec{r}\right) = \varepsilon_0 c E_m^2 \cos^2\left(\omega t - \vec{k}\vec{r}\right).$$

Поскольку среднее значение $\left\langle \cos^2\left(\omega t - \vec{k}\vec{r}\right)\right\rangle = \left\langle \cos^2\alpha \right\rangle = 1/2$ получим для интенсивности волны:

$$I = \left\langle \left|\vec{S}\right| \right\rangle = \varepsilon_0 c E_m^2 / 2.$$

Пример 5.

По прямому проводнику круглого сечения течет постоянный ток *I*. Найдите поток вектора Пойнтинга через боковую поверхность участка данного проводника, имеющего сопротивление *R*.



Решение

Вектор Пойнтинга определяется формулой

$$\vec{S} = [\vec{E}\vec{H}],$$

где, $\vec{H} = \vec{B}/\mu\mu_0$, $\vec{B}$ - вектор индукции магнитного поля, $\vec{E}$ - вектор напряженности электрического поля в рассматриваемой точке. Нас интересуют точки, лежащие на поверхности цилиндрического провода.

Магнитные линии являются концентрическими окружностями, центры которых лежат на оси проводника, векторы $\vec{H}$ направлены по касательным к этим окружностям. На рисунке для двух точек поверхности проводника показаны векторы $\vec{E}$, $\vec{H}$ и $\vec{S}$. При помощи теоремы о циркуляции найдем модуль вектора $\vec{H}$:

$$H\,2\pi r = I,$$

где r - радиус проводника. Поэтому $|\vec{S}| = EH = \dfrac{EI}{2\pi r}$, а поток энергии через боковую поверхность проводника равен

$$\Phi = |\vec{S}|\, A,$$

где $A = l2\pi r$ - площадь боковой поверхности, l - длина проводника. Окончательно получим:

$$\Phi = ElI = UI = I^2 R\,.$$