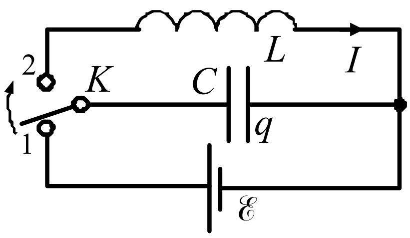
Электрические колебания

Примеры решения задач

Пример 1.

В схеме, изображенной на рисунке, ключ, первоначально находившийся в положении 1, в момент времени $t = 0$ переводят в положение 2. Пренебрегая сопротивлением катушки и считая известными ЭДС источника $\mathscr{E}$, индуктивность катушки L и емкость конденсатора C, определите зависимость тока I в контуре от времени.



Решение.

После перевода ключа из положения 1 в положение 2 получим колебательный контур, образованный конденсатором и катушкой. Обозначим через q заряд обкладки конденсатора, в которую втекает ток показанного на рисунке направления. Тогда, по второму правилу Кирхгофа:

$$\mathscr{E}_i = u_C ,$$

где $\mathscr{E}_i = -\dfrac{d\Phi}{dt}$ - ЭДС индукции в контуре, $u_C = \dfrac{q}{C}$ - напряжение на конденсаторе, $\Phi = LI$ - магнитный поток через витки катушки, $I = \dfrac{dq}{dt}$ - ток в контуре. Из этих уравнений получим

$$L\frac{dI}{dt} + \frac{q}{C} = 0 ,$$

или

$$\frac{d^2q}{dt^2} + \omega_0^2 q = 0 ,$$

где введено обозначение $\omega_0^2 = \dfrac{1}{LC}$. Общее решение полученного уравнения можно записать в виде:

$$q = q_m \cos(\omega_0 t + \varphi) ,$$

где q_m и φ - произвольные постоянные, которые в конкретной задаче можно найти из начальных условий. Ток в контуре найдем дифференцированием:

$$I = \frac{dq}{dt} = -q_m\omega_0 \sin(\omega_0 t + \varphi) ,$$

В рассматриваемой задаче до перевода ключа из положения 1 в положение 2 заряд правой (рис.) обкладки конденсатора был равен $q = -C\mathscr{E}$, а ток через катушку $I = 0$. Заряд конденсатора и ток через катушку мгновенно измениться не могут, поэтому сразу после переключения (при $t = 0$):

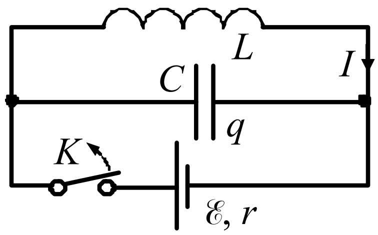
$$q(0) = q_m \cos(\varphi) = -C\mathscr{E} ,$$

$$I(0) = -q_m\omega_0 \sin(\varphi) = 0 .$$

Отсюда следует $\varphi = 0$ и $q_m = -C\mathscr{E}$. Таким образом, $I = \omega_0 C\mathscr{E} \sin(\omega_0 t)$, где $\omega_0 = 1/\sqrt{CL}$.

Пример 2.

В схеме, изображенной на рисунке, ключ K первоначально замкнут. После размыкания ключа в контуре возникают электрические колебания с периодом $T = 3{,}14$ мкс, при этом амплитуда колебаний напряжения на конденсаторе в $N = 5$ раз больше ЭДС источника. Найдите индуктивность L и емкость C контура, если внутреннее сопротивление источника $r = 10$ Ом, а сопротивление катушки пренебрежимо мало.



Решение.

Как и в примере 1, получим дифференциальное уравнение

$$\frac{d^2q}{dt^2} + \omega_0^2 q = 0,$$

где q - заряд обкладки конденсатора, в которую втекает ток показанного на рисунке направления, $\omega_0^2 = 1/\sqrt{LC}$. Общее решение этого уравнения

$$q = q_m \cos(\omega_0 t + \varphi)$$

включает две постоянные q_m и φ, которые найдем из начальных условий. До переключения ток через катушку равен $I_0 = \mathcal{E}/r$, а напряжение на конденсаторе и его заряд равны нулю, так как конденсатор замкнут на катушку с нулевым сопротивлением. Заряд конденсатора и ток через катушку мгновенно измениться не могут, поэтому сразу после размыкания ключа при $t = 0$:

$$q(0) = q_m \cos(\varphi) = 0,$$

$$I(0) = \left.\frac{dq}{dt}\right|_{t=0} = -q_m\omega_0 \sin(\omega_0 t + \varphi)\big|_{t=0} = -q_m\omega_0 \sin(\varphi) = \frac{\mathcal{E}}{r}.$$

Следовательно, $\varphi = \pi/2$ и $-q_m\omega_0 = \mathcal{E}/r$. Амплитуда колебаний напряжения на конденсаторе равна

$$U_m = \frac{|q_m|}{C} = \frac{\mathcal{E}}{\omega_0 rC}.$$

По условию задачи эта амплитуда в N раз больше ЭДС источника. Следовательно,

$$N = \frac{1}{\omega_0 rC}.$$

Учитывая, что $T = 2\pi/\omega_0 = 2\pi\sqrt{LC}$, получим

$$C = \frac{T}{2\pi rN} = 10 \text{ нФ}, \quad L = \frac{rNT}{2\pi} = 25 \text{ мкГн}.$$

Пример 3.

Колебательный контур состоит из конденсатора емкостью $C = 4$ мкФ и катушки индуктивностью $L = 2$ мГн с активным сопротивлением $R = 10$ Ом. Найдите отношение энергии магнитного поля катушки к энергии электрического поля конденсатора в момент максимума тока.

Решение.

Представим катушку в виде последовательно соединенных резистора сопротивлением R и «идеальной» катушки индуктивности L с нулевым активным сопротивлением. Запишем второе правило Кирхгофа:

$$\mathcal{E}_i = u_C + u_R,$$

где $\mathcal{E}_i = -\dfrac{d\Phi}{dt}$ - ЭДС индукции в контуре, $u_C = \dfrac{q}{C}$ - напряжение на конденсаторе, $u_R = iR$ - напряжение на резисторе, $\Phi = LI$ - магнитный поток через витки катушки, $i = \dfrac{dq}{dt}$ - ток в контуре. Из этих уравнений получим

$$L\frac{di}{dt} + iR + \frac{q}{C} = 0.$$

В момент времени, когда ток максимален $i = I_m$ и $\dfrac{di}{dt} = 0$. Заряд конденсатора в этот момент времени найдем из записанного выше уравнения:

$$I_m R + \frac{q}{C} = 0.$$

Энергия магнитного поля катушки в этот момент $W_L = LI_m^2/2$, а энергия электрического поля конденсатора $W_C = q^2/2C$. Из этих уравнений найдем:

$$\frac{W_L}{W_C} = \frac{L}{R^2 C} = 5.$$

Пример 4.

Колебательный контур имеет емкость $C = 10$ мкФ, индуктивность $L = 25$ мГн и активное сопротивление $R = 1$ Ом. Через сколько колебаний амплитуда тока в этом контуре уменьшится в e раз?

Решение.

Запишем второе правило Кирхгофа для колебательного контура:

$$\mathcal{E}_i = u_C + u_R,$$

где $\mathcal{E}_i = -\dfrac{d\Phi}{dt}$ - ЭДС индукции в контуре, $u_C = \dfrac{q}{C}$ - напряжение на конденсаторе, $u_R = iR$ - напряжение на резисторе, $\Phi = LI$ - магнитный поток через витки катушки, $i = \dfrac{dq}{dt}$ - ток в контуре. Из этих уравнений получим дифференциальное уравнение

$$\frac{d^2 q}{dt^2} + 2\beta\frac{dq}{dt} + \omega_0^2 q = 0,$$

где $\beta = \dfrac{R}{2L}$, $\omega_0^2 = \dfrac{1}{LC}$. При $\omega_0 > \beta$ решение этого уравнения имеет вид

$$q = q_m e^{-\beta t}\cos(\omega t + \alpha),$$

где $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$, q_m и α - произвольные постоянные. Ток в контуре найдем, вычисляя производную

$$i = \frac{dq}{dt} = -q_m e^{-\beta t}\left[\omega \sin(\omega t + \alpha) + \beta \cos(\omega t + \alpha)\right].$$

Используя метод векторных диаграмм, полученное выражение можно представить в виде:

$$i = i_m e^{-\beta t} \cos(\omega t + \alpha + \delta),$$

где i_m и δ - новые постоянные.

Амплитудой затухающих колебаний тока называют величину $I_m = i_m e^{-\beta t}$, она уменьшится в e раз за время $t = 1/\beta$. За это время произойдет $N = t/T$ колебаний, где $T = 2\pi/\omega$. Таким образом:

$$N = \frac{\omega}{2\pi\beta} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{4L}{CR^2} - 1} \approx 16.$$

Пример 5.

Соединенные последовательно конденсатор емкостью *C*, катушка индуктивностью *L* и резистор сопротивлением *R* подключены к источнику синусоидального напряжения постоянной амплитуды, частоту ω которого можно изменять. Определите частоту, при которой становится максимальным эффективное напряжение: а) на конденсаторе; б) на катушке. Активным сопротивлением катушки пренебречь.

Решение.

Эффективное значение силы тока в контуре найдем, разделив эффективное напряжение источника на полное сопротивление цепи:

$$I_{\text{эфф}} = \frac{U_{\text{эфф}}}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega c}\right)^2}}.$$

Эффективные значения напряжения на конденсаторе и на катушке равны

$$U_C = I_{\text{эфф}} X_C, \qquad U_L = I_{\text{эфф}} X_L$$

где $X_C = 1/\omega C$ и $X_L = \omega L$ - емкостное и индуктивное сопротивления. Следовательно:

$$U_C = \frac{U_{\text{эфф}}}{\omega C\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega c}\right)^2}}, \quad U_L = \frac{\omega L U_{\text{эфф}}}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega c}\right)^2}}$$

Напряжение на конденсаторе U_C достигает максимума, когда функция частоты

$$f_1(\omega) = \omega\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}$$

достигает минимума. Вычисляя производную $df_1/d\omega$ и решая уравнение $df_1/d\omega = 0$, получим частоту ω_1, при которой эффективное напряжение на конденсаторе максимально: $\omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}$, где $\omega_0^2 = 1/LC$, $\beta = R/2L$.

Напряжение на катушке достигает максимума, когда минимума достигает функция

$$f_2(\omega) = \frac{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \dfrac{1}{\omega C}\right)^2}}{\omega}.$$

Решая уравнение $df_2 / d\omega = 0$, найдем частоту ω_2, при которой эффективное напряжение на катушке максимально: $\omega_2 = \omega_0^2 / \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}$.