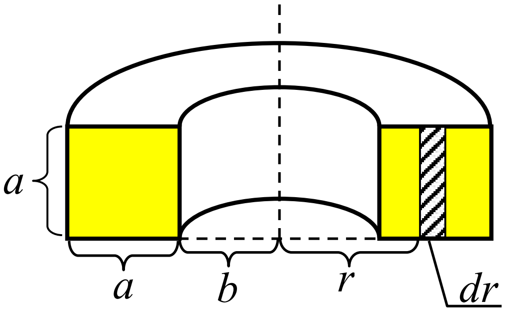
Примеры решения задач

Пример 1.

Найдите индуктивность L тороидальной катушки из N витков, внутренний радиус которой равен b, а поперечное сечение имеет форму квадрата со стороной a. Пространство внутри катушки заполнено веществом с магнитной проницаемостью μ.



Решение.

Индуктивность катушки определяется выражением

$$L = \Phi / I,$$

где I – ток в катушке, Φ – магнитный поток через ее витки. Применяя теорему о циркуляции вектора $\vec{H}$ для контура в виде окружности радиуса r, перпендикулярной оси тороида с центром, лежащей на этой оси (выбранный контур совпадает с одной из линий поля $\vec{B}$), найдем зависимость индукции B от расстояния r до оси тороида:

$$H(r)2\pi r = NI,$$

$$B(r) = \mu\mu_0 H(r),$$

$$B(r) = \frac{\mu\mu_0 NI}{2\pi r}.$$

Поток вектора индукции через элементарную площадку, показанную на рисунке штриховкой, равен

$$d\Phi_1 = B(r)dS = B(r)adr.$$

Поток через один виток катушки найдем интегрированием:

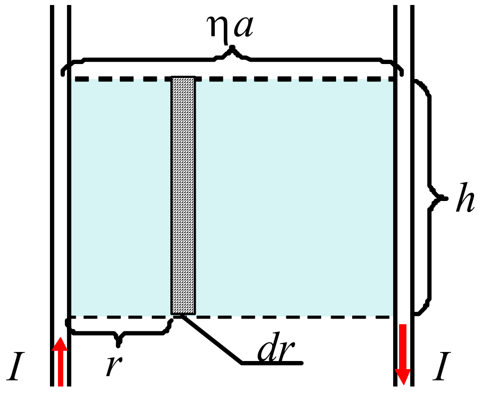
$$\Phi_1 = \int d\Phi_1 = \int B(r)adr = \frac{\mu\mu_0 NIa}{2\pi}\int_b^{b+a}\frac{dr}{r} = \frac{\mu\mu_0 NIa}{2\pi}\ln\frac{a+b}{b}.$$

Учитывая, что полный поток, пронизывающий N витков, равен $\Phi = N\Phi_1$, получим для индуктивности тороидального соленоида:

$$L = \frac{\mu\mu_0 N^2 a}{2\pi}\ln\frac{a+b}{b}.$$

Пример 2.

Найдите индуктивность L единицы длины двухпроводной линии, если радиус каждого провода в η раз меньше расстояния между их осями. Полем внутри проводов пренебречь, магнитную проницаемость всюду считать равной единице и $\eta >> 1$.



Решение.

Индукцию магнитного поля в точках плоской поверхности, натянутой на провода, найдем как суперпозицию полей каждого провода (см. рис.):

$$B_1(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \quad \text{и} \quad B_2(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi(\eta a - r)},$$

$$B(r) = B_1(r) + B_2(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi}\left(\frac{1}{r} + \frac{1}{\eta a - r}\right),$$

где a – радиус провода. Поток вектора индукции через полоску длиной h и шириной dr представим в виде

$$d\Phi = B(r)dS = \frac{\mu_0 Ihdr}{2\pi}\left(\frac{1}{r} + \frac{1}{\eta a - r}\right).$$

Полный поток через выбранную поверхность получим в результате интегрирования:

$$\Phi = \frac{\mu_0 Ih}{2\pi}\left(\int_a^{\eta a - a} \frac{dr}{r} + \int_a^{\eta a - a} \frac{dr}{\eta a - r}\right) = \frac{\mu_0 Ih}{2\pi} 2\ln\eta .$$

Учитывая, что поток связан с индуктивностью соленоида соотношением $\Phi = LI$, получим индуктивность на единицу длины:

$$L_1 = \frac{\Phi}{hI} = \frac{\mu_0}{\pi}\ln\eta .$$

<u>ЭДС самоиндукции.</u>

<u>Явления при размыкании и замыкании тока в цепи</u>

<u>Пример 3.</u>

Ток в катушке, индуктивность которой L = 0,1 Гн, изменяется со временем t по закону $I = I_0(1 + t^2/\tau^2)$, где I_0 = 100 мА, τ = 1 мс. Определите магнитный поток Ф и ЭДС самоиндукции □ в контуре в момент времени $t = \tau$.

<u>Решение</u>.

Величина магнитного потока определяется мгновенной величиной тока соотношением $\Phi(t) = LI(t)$. В момент времени $t = \tau$ поток равен

$$\Phi(\tau) = LI(\tau) = 2LI_0 .$$

При изменении силы тока в контуре возникает ЭДС самоиндукции

$$\mathcal{E}_s(t) = -L\frac{dI}{dt} = -2LI_0\frac{t}{\tau^2},$$

величина которой в момент времени $t = \tau$ равна

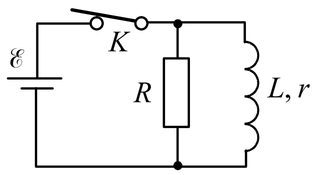
$$\mathcal{E}_s(\tau) = -2L\frac{I_0}{\tau}.$$

Численные значения искомых величин получим, подставляя данные из условия задачи в полученные выражения:

$$\Phi(\tau) = 2LI_0 = 0.02 \text{ Вб}, \qquad \mathcal{E}_s(\tau) = -2L\frac{I_0}{\tau} = -20 \text{ В}.$$

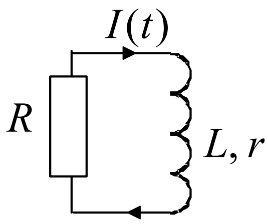
Пример 4.

Ключ K в приведенной на рисунке схеме в течение длительного времени был замкнут. Определите зависимость от времени напряжения $U(t)$ на катушке после размыкания ключа в момент $t = 0$. Индуктивность катушки $L = 0{,}1$ Гн, сопротивление ее обмотки $r = 100$ Ом, сопротивление резистора $R = 100$ кОм, ЭДС источника □□ = 12 В, его внутреннее сопротивление пренебрежимо мало.



Решение.

До размыкания ключа через резистор и катушку текут постоянные токи, величины которых равны $I_R = \mathcal{E}/R$ и $I_L = \mathcal{E}/r$, так как напряжения на этих элементах одинаковы и равны $U_R = U_L = \mathcal{E}$ в силу малости внутреннего сопротивления источника.



После размыкания ключа уменьшению тока в катушке будет противодействовать ЭДС самоиндукции, что приведет к протеканию в замкнутой цепи (рис.) убывающего со временем тока $I(t)$, значение которого в момент размыкания равно $I_R = \mathcal{E}/R$. Закон Ома для замкнутой RL цепи, в которой действует ЭДС самоиндукции $\mathcal{E}_s = -L(dI/dt)$, приводит к следующему дифференциальному уравнению для $I(t)$:

$$(R+r)I(t) = -L\frac{dI}{dt}.$$

После разделения переменных уравнение примет вид:

$$\frac{dI}{I} = -\frac{R+r}{L}dt\ .$$

Принимая во внимание начальное условие $I(0) = \mathcal{E}/r$, после интегрирования получим:

$$I(t) = \frac{\mathcal{E}}{r}e^{-\frac{R+r}{L}t}\ .$$

Напряжение на катушке и резисторе будут одинаковыми и равными

$$U(t) = RI(t) = \mathcal{E}\frac{R}{r}e^{-\frac{R+r}{L}t}\ .$$

Замечание: Напряжение на катушке сразу после размыкания ключа равно $U(0) = 12\frac{100*10^3}{100} = 12$ кВ, что в тысячу раз больше напряжения на катушке до момента размыкания равного □ = 12 В. Постоянная времени процесса размыкания равна $\tau = \frac{L}{R+r} \cong \frac{L}{R} = 10^{-6}\,c$.

Сохранение магнитного потока в сверхпроводящем контуре

Пример 5.

Кольцо радиуса $a = 5$ см из тонкой проволоки индуктивности $L = 0{,}26$ мкГн поместили в однородное магнитное поле с индукцией $B = 0{,}5$ мТл так, что его плоскость стала перпендикулярной направлению поля. Затем кольцо охладили до сверхпроводящего состояния и выключили магнитное поле. Найдите величину I тока в кольце.

Решение.

После помещения кольца в магнитное поле B, магнитный поток пронизывающий его, стал равен $\Phi = BS = B\pi a^2$. Когда кольцо охладили до сверхпроводящего состояния и выключили магнитное поле, магнитный поток через кольцо остался неизменным по закону сохранения магнитного потока пронизывающего сверхпроводящий контур. Неизменность потока обеспечивается протеканием индукционного тока в кольце. Равенство первоначального потока потоку, порождаемому индукционным током LI, определяет величину I тока в кольце:

$$I = \frac{B\pi a^2}{L} = \frac{0.5*10^{-3}*3.14*25*10^{-4}}{0.26*10^{-6}} \cong 15 \ A.$$

Магнитная энергия контура с током

Пример 6.

Катушка индуктивности $L = 2$ мкГн подключена к источнику постоянной ЭДС $\varepsilon = 3$В. Параллельно катушке включен резистор сопротивлением $R = 2$ Ом (см. рис.). Сопротивление провода катушки $r = 1$ Ом, внутреннее сопротивление источника пренебрежимо мало. Какое количество теплоты выделится после размыкания ключа K: а) во всей цепи; б) в катушке.

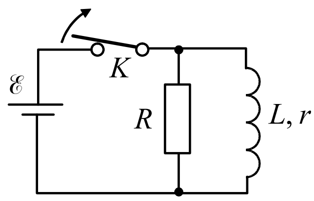


Рис.4

Решение.

После размыкания ключа в замкнутом контуре, состоящем из катушки и резистора, будет циркулировать ток, величина которого будет уменьшаться из-за сопротивлений катушки и резистора. Начальное значение этого тока соответствует току, протекающему через катушку в момент отключения источника $I = \mathscr{E}/r$ (учтено, что в силу малости сопротивления источника напряжения на катушке и резисторе до размыкания ключа равно ЭДС источника).

Работа по протеканию тока после размыкания ключа обеспечивается ЭДС самоиндукции и равна магнитной энергии, запасенной катушкой на момент размыкания ключа. Количество тепла, выделившегося во всей цепи после размыкания ключа, равно запасенной энергии катушки

$$Q = \frac{LI^2}{2} = \frac{L\mathscr{E}^2}{2r^2}.$$

Мощность выделения тепла на катушке и резисторе, с учетом одинаковости величины тока, пропорциональна их сопротивлению, поэтому и полные количества тепла, выделившегося на катушке Q_L и резисторе Q_R, также пропорциональны их сопротивлениям. Этот анализ позволяет свести нахождение величин Q_R и Q_L к решению системы уравнений:

$$\begin{cases} Q_R + Q_L = \dfrac{L\mathcal{E}^2}{2r^2} \\ \dfrac{Q_R}{Q_L} = \dfrac{R}{r} \end{cases},$$

решая которую, получим искомые величины:

$$Q = \frac{L\mathcal{E}^2}{2r^2} = \frac{2*10^{-6}*9}{2*1} = 9 \text{ мкДж},$$

$$Q_L = \frac{L\varepsilon^2}{2r(R+r)} = \frac{2*10^{-6}*9}{2*3} = 3 \text{ мкДж}.$$

Пример 7.

В сверхпроводящем контуре протекает постоянный ток, энергия магнитного поля которого равна W. Какую работу A следует совершить, чтобы, медленно деформируя контур, уменьшить его индуктивность в n раз?

Решение.

Работа внешней силы по деформации контура равна приращению магнитной энергии контура

$$A = \Delta W .$$

Вычислим энергию контура в его начальном 1 и конечном 2 состояниях

$$W_1 = W = \frac{L_1 I_1^{\,2}}{2} \quad \text{и} \quad W_2 = \frac{L_2 I_2^{\,2}}{2}$$

где L - индуктивность контура, I - ток в контуре. Значение тока I_2 определяется условием неизменности потока при деформации сверхпроводящего контура

$$L_1 I_1 = L_2 I_2 .$$

По условию задачи $L_2 = \dfrac{L_1}{n}$, поэтому $I_2 = I_1 n$, а энергия контура в конечном состоянии

$$W_2 = \frac{L_2 I_2^{\,2}}{2} = \frac{n L_1 I_1^2}{2} = nW .$$

Искомая работа определяется выражением

$$A = W_2 - W_1 = (n-1)W .$$

Взаимная индуктивность.

Магнитная энергия двух контуров с токами

Пример 8.

Два длинных коаксиальных соленоида содержат n_1 и n_2 витков на единицу длины. Внутренний соленоид, имеющий площадь поперечного сечения S, заполнен магнетиком проницаемости μ. Определите взаимную индуктивность L_{12} соленоидов в расчете на единицу их длины.

Решение.

Обозначим I_2 – ток внутреннего соленоида. Тогда магнитное поле, порождаемое током I_2, равно $B_2 = \mu\mu_0 n_2 I_2$, направлено вдоль оси соленоидов и однородно по всему поперечному сечению внутреннего соленоида. Поток индукции этого поля пронизывает каждый виток внешнего соленоида. Поэтому поток Φ_1 тока I_2, пронизывающий n_1 витков внешнего соленоида, равен $\Phi_1 = B_2 S n_1 = \mu\mu_0 n_1 n_2 S I_2$. Выражение этого же потока через коэффициент взаимной индукции имеет вид $\Phi_1 = L_{12} I_2$. Сравнивая выражения для потоков, получим:

$$L_{12} = \mu\mu_0 n_1 n_2 S$$

Замечание. Такой же результат мы получили бы и для L_{21}, рассматривая поток магнитного поля внешнего соленоида $B_1 = \mu\mu_0 n_1 I_1$, пронизывающего n_2 витков внутреннего соленоида: $\Phi_2 = B_1 S n_2 = \mu\mu_0 n_1 n_2 S I_1$.

Пример 9.

Тороидальная катушка содержит $N = 500$ витков провода. Найдите энергию W магнитного поля при токе $I = 2$ А, если магнитный поток через поперечное сечение тора в этом случае Ф = 1 мВб.

Решение.

Полный поток, пронизывающий катушку равен $N\Phi$, поэтому магнитная энергия катушки с током равна

$$W = \frac{N\Phi I}{2}.$$

Выполнив вычисление, найдем

$$W = 0.5 \text{ Дж}.$$

Пример 10.

Катушка и сверхпроводящий виток, индуктивность которого L расположены на большом расстоянии друг от друга. В катушке течет постоянный ток I, задаваемый источником, а ток в витке равен нулю. Определите приращение энергии магнитного поля системы, после того, как виток медленно переместят в положение, где взаимная индуктивность витка и катушки станет равной L_{12}.

Решение.

При приближении сверхпроводящего витка к катушке он попадает в область магнитного поля катушки и в нем индуцируется ток I_1, величина и направление которого должны обеспечивать неизменность магнитного потока, пронизывающего виток. То есть магнитный поток витка Φ_1 должен оставаться равным нулю:

$$\Phi_1 = LI_1 + L_{12} I = 0.$$

Поэтому величина тока в витке равна

$$I_1 = -\frac{L_{12} I}{L}.$$

Начальная магнитная энергия системы определяется током в катушке $W_1 = W_{\text{кат}}$, конечная включает помимо энергии катушки, которая не изменилась в силу постоянства в ней тока, собственную энергию витка $\frac{LI_1^2}{2}$ и магнитную энергию взаимодействия витка с катушкой $L_{12}I_1I$. То есть

$$W_2 = W_{\text{кат}} + \frac{LI_1^2}{2} + L_{12}I_1I .$$

Для приращения магнитной энергии системы получим:

$$\Delta W = W_2 - W_1 = -\frac{L_{12}^2 I^2}{2L}$$

<u>Объемная плотность энергии магнитного поля</u>

<u>Пример 11.</u>

По прямому длинному тонкому проводу, расположенному в вакууме, течет постоянный ток *I*. Определите энергию *W* магнитного поля, локализованную внутри коаксиального с проводом цилиндрического слоя с внутренним радиусом r_1, внешним радиусом r_2 и высотой *h*.

<u>Решение</u>.

Магнитное поле создаваемое током в точках, удаленных на расстояние r от провода, равно

$$B(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}.$$

Плотность энергии магнитного поля в этих точках пространства

$$w(r) = \frac{B^2(r)}{2\mu_0} = \frac{\mu_0 I^2}{8\pi^2 r^2}.$$

Энергия, локализованная внутри цилиндрического слоя

$$W = \int w dV .$$

Элементарный объем dV должен быть таким, чтобы в нем плотность энергии, а следовательно, и индукция магнитного поля оставались постоянными. С учетом осевой симметрии распределения поля этому условию удовлетворяет тонкий цилиндрический слой, объем которого равен $dV = (2\pi r dr)h$. Тогда искомая энергия равна

$$W = \int_{r_1}^{r_2} w(2\pi r dr)h = \frac{\mu_0 I^2 h}{4\pi}\int_{r_1}^{r_2}\frac{dr}{r} = \frac{\mu_0 I^2 h}{4\pi}\ln\frac{r_2}{r_1}.$$

<u>«Энергетический» метод расчета индуктивности</u>

<u>Пример 12.</u>

Найдите индуктивность L_1 единицы длины кабеля, представляющего собой два тонкостенных коаксиальных металлических цилиндра, если радиус внешнего цилиндра в $\eta = 3{,}6$ раза больше внутреннего. Магнитную проницаемость среды между цилиндрами считать равной единице .

<u>Решение</u>.

Если по коаксиальным металлическим цилиндрам пропустить ток I (направление тока по внутреннему и внешнему цилиндрам противоположно), то магнитное поле внутри кабеля на расстоянии r от оси равно $B(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$. Повторив рассуждения, приведенные в примере 11, получим энергию магнитного поля в пространстве между цилиндрами на единицу длины кабеля

$$W_1 = \frac{W}{h} = \frac{\mu_0 I^2}{4\pi} \ln \frac{r_2}{r_1} = \frac{\mu_0 I^2}{4\pi} \ln \eta .$$

Представление этой же энергии через индуктивность единицы длины кабеля имеет вид:

$$W_1 = \frac{W}{h} = \frac{LI^2}{2h} = \frac{L_1 I^2}{2} .$$

Сравнение двух выражений для магнитной энергии дает:

$$L_1 = \frac{\mu_0}{2\pi} \ln \eta = 2.6 \cdot 10^{-7} \text{ Гн/м.}$$