Подготовка к КР-1 (часть1).

Закон Кулона. Вектор Напряженности. Теорема Гаусса.

1.1. Электрический заряд

Электрическое взаимодействие является одним из четырех фундаментальных взаимодействий. С одним из них, гравитационным, мы уже имели дело. Источником гравитационной силы, как известно, является гравитационная масса тел. Аналогично, электрическая сила порождается электрическим зарядом.

Определение электрического заряда, как физической величины, сводится к определению его основных (фундаментальных) свойств и указанию принципиального способа его измерения.

Как измерить электрический заряд

Введем сначала понятие пробного заряда. Пробный заряд - заряженное тело, удовлетворяющее 2-м условиям:

А) Величина заряда q_{np} настолько мала, что он не вызывает перемещения зарядов на других телах.

Б) Размеры пробного тела (заряда) значительно меньше расстояний до других заряженных тел (такой заряд называют точечным).

Пусть Q - неподвижное заряженное тело, q_1 , q_2 - пробные заряды. Будем эти пробные заряды последовательно помещать в некоторую точку пространства А и измерять действующие на них силы F_1 и F_2. Обобщением опытных фактов является следующий результат. 1) Эти силы имеют либо одинаковые, либо прямо противоположные направления. 2) Отношение модулей этих сил не зависит от положения точки А и степени "заряженности" тела Q. Следовательно, отношение F_1/F_2 является характеристикой самих пробных зарядов. Можно принять

$$F_1/F_2 = q_1/q_2 .$$

Заряд какого-либо произвольного тела можно принять за единицу, тогда измерение отношения F_1/F_2 дает способ определения величины заряда в абсолютной мере. В системе СИ единицей измерения заряда является 1 Кулон. Перечислим основные свойства электрического заряда.

Фундаментальные свойства заряда

В природе электрические заряды существуют в двух видах, которые названы положительным и отрицательным зарядами. Заряды одного вида отталкиваются друг от друга и притягиваются к зарядам другого вида. Именно это свойство лежит в основе подразделения всех зарядов на два вида. Тот заряд, который мы называем отрицательным, можно было бы с равным успехом назвать положительным и наоборот. Выбор названия был исторической случайностью. Наша Вселенная представляет собой хорошо уравновешенную смесь положительных и отрицательных электрических зарядов.

Полный заряд системы не может измениться, если через ее границу не проходят электрические заряженные частицы (закон сохранения заряда). Это не значит, что сохраняются в отдельности положительный и отрицательный заряды системы. Например, при аннигиляции электрона с позитроном исчезает как положительный, так и отрицательный заряд, однако полный заряд остается равным нулю как до, так и после аннигиляции. Закон сохранения заряда надежно проверен в многочисленных экспериментах.

Эксперименты показывают, что ни у одной из заряженных частиц не встречается заряд, который был бы меньше заряда протона или электрона. Этот элементарный заряд равен

$1{,}6\cdot10^{-19}$ Кл и обозначается символом *e*. Заряд электрона равен $-e$, заряд протона $+e$. Заряженные тела могут иметь заряд, обязательно равный целому кратному *e*.

Электрический заряд - релятивистски инвариантное число. Это означает, что величина заряда не зависит от его скорости и выбора инерциальной системы отсчета.

1.2. Закон Кулона

В 1785 г французский военный инженер Кулон экспериментально установил, что сила взаимодействия 2-х неподвижных точечных зарядов, находящихся в вакууме на расстоянии r друг от друга, определяется формулой

$$F = k\frac{|q_1|\cdot|q_2|}{r^2},$$

где k - коэффициент пропорциональности, зависящий от выбранной системы единиц. В системе СИ $k = 9\cdot10^9$ Нм^2/Кл^2, этот коэффициент принято записывать в виде $k = 1/4\pi\varepsilon_0$, где ε_0 - электрическая постоянная.

Сила взаимодействия $\vec{F}$ направлена вдоль прямой, соединяющей заряды. Закон Кулона можно записать в векторной форме

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2}{r^2}\frac{\vec{r}}{r},$$

где $\vec{F}$ - сила, действующая на первый заряд со стороны второго, а вектор $\vec{r}$ проведен от заряда q_2 к q_1

Замечание 1. Закон Кулона определяет силу взаимодействия неподвижных зарядов. Если заряды движутся, то 1) возникает еще и магнитное взаимодействие 2) возникает проблема, связанная со скоростью распространения взаимодействий (об этом далее).

Замечание 2. Кулон, Кэвендиш проверили зависимость $F \sim 1/r^2$ в диапазоне 1 - 100 см с точностью 2%. Сегодня можно считать эту зависимость надежно проверенной в диапазоне 10^{-13} см - 10 км.

1.3. Электрическое поле

Вектор напряженности электрического поля - силовая характеристика поля. Напряженностью электрического поля в точке *A* называется вектор

$$\boxed{\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q}},$$

где $\vec{F}$ - сила, действующая на неподвижный пробный электрический заряд q, помещенный в данную точку *A* электрического поля. Это определение справедливо и для меняющегося во времени электрического поля, и содержит в себе указание на способ измерения вектора $\vec{E}$.

Напряженность электрического поля неподвижного точечного заряда.

Пусть Q - неподвижный точечный заряд. Найдем вектор напряженности в точке *A*, положение которой задается вектором $\vec{r}$, проведенным от заряда Q (источника поля). Для этого мысленно поместим в точку пробный заряд q. По закону Кулона на пробный заряд действует сила

$$\vec{F}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Qq\vec{r}}{r^3}.$$

Тогда

$$\vec{E}=\frac{\vec{F}}{q}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q\vec{r}}{r^3}, \qquad \left|\vec{E}\right|=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{|Q|}{r^2}.$$

Принцип суперпозиции

Опыт показывает, что напряженность поля системы точечных неподвижных зарядов равна векторной сумме напряженностей полей, которые создавали бы каждый из зарядов в отдельности. Это утверждение называют принципом суперпозиции электрических полей

Пример 1. Вектор напряженности на продольной оси диполя.

Пример 2. Вектор напряженности на поперечной оси диполя.

Пример 3. Вектор напряженности на оси равномерно заряженного кольца.

Силовые линии поля $\vec{E}$

В реальных задачах поле $\vec{E}$ измеряется или рассчитывается в большом числе точек пространства. Для наглядного отображения электрического поля Фарадей предложил изображать поле графически при помощи силовых линий.

Силовая линия (линия поля $\vec{E}$) - геометрическая линия, касательная к которой в каждой точке совпадает с вектором напряженности поля $\vec{E}$ в этой точке. Условились считать, что направление силовой линии совпадает с направлением вектора $\vec{E}$.

Свойства силовых линий: 1) начинаются на положительных зарядах, заканчиваются на отрицательных, или одним концом уходят в бесконечность, 2) силовые линии не пересекаются друг с другом.

Примеры: 1) положительный точечный заряд, 2) отрицательный точечный заряд, 3) два точечных заряда.

1.4. Теорема Гаусса

Поток вектора через поверхность.

Рассмотрим сначала однородное поле $\vec{E}$ - это такое поле, вектор $\vec{E}$ которого во всех точках пространства одинаков по величине и направлению. Рассмотрим также воображаемую плоскую поверхность площади S в этом поле. Потоком вектора $\vec{E}$ через поверхность S называют скалярную величину равную

$$\Phi = SE\cos\alpha,$$

где α - угол между вектором напряженности и нормалью к поверхности. Если определить вектор площади $\vec{S}$ (его модуль равен площади, а направлен он вдоль нормали к поверхности), то $\Phi=\vec{E}\vec{S}$.

Если площадка не является плоской, а поле $\vec{E}$ однородным, то поверхность необходимо разбить на малые площадки, каждую из которых можно считать плоской, а поле $\vec{E}$ в ее пределах однородным. Тогда

$$\Phi=\sum E_i\Delta S_i\cos\alpha_i=\sum \vec{E}_i\Delta\vec{S}_i .$$

Такую сумму бесконечно малых слагаемых называют поверхностным интегралом:

$$\Phi=\int_S \vec{E}d\vec{S}.$$

Теорема Гаусса (формулировка): Поток вектора $\vec{E}$ через произвольную замкнутую поверхность равен алгебраической сумме зарядов q, охватываемых этой поверхностью, деленной на ε_0:

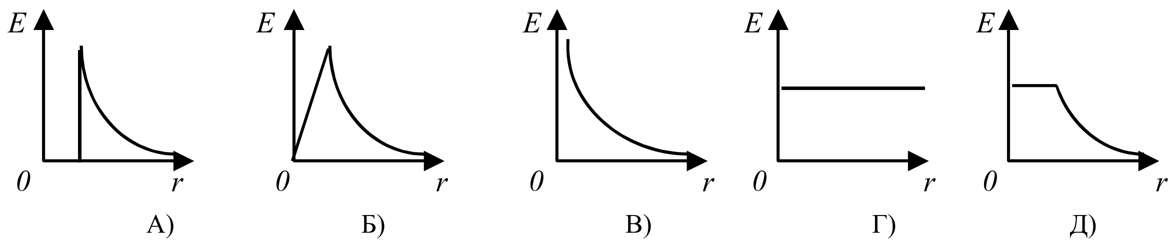
$$\int_S \vec{E}d\vec{S} = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

Доказательство….

Замечание. Теорема Гаусса в электростатике есть следствие закона Кулона и принципа суперпозиции. Однако многочисленные эксперименты позволяют заключить, что эта теорема применима и для переменных полей (изменяющихся во времени), то есть и в тех случаях, когда закон Кулона не применим. Это является важнейшим обобщением и к теореме Гаусса следует относиться как к самостоятельному закону природы.

1.5. Применение теоремы Гаусса

1. Поле равномерно заряженной по поверхности сферы (рис.А)
2. Поле равномерно заряженного по объему шара (рис.Б).
3. Поле равномерно заряженной длинной нити (рис.В).
4. Поле равномерно заряженного по поверхности длинного цилиндра (рис.А).
5. Поле равномерно заряженной бесконечной плоскости (рис.Г).



Определения. Формулировки.

1. Что такое вектор напряженности электрического поля?
2. Что такое силовая линия?
3. Что такое поток вектора через поверхность?
4. Сформулируйте теорему Гаусса.
5. Сформулируйте закон сохранения заряда.
6. В чем состоит принцип суперпозиции полей?

Основные формулы

1. Закон Кулона: $\vec{F} = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{q_1 q_2}{r^2}\dfrac{\vec{r}}{r}$
2. Определение вектора напряженности: $\vec{E} = \dfrac{\vec{F}}{q}$
3. Напряженность поля точечного заряда: $\vec{E} = \dfrac{\vec{F}}{q} = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{Q\vec{r}}{r^3}$
4. Определение потока: $\Phi = \int_S \vec{E}d\vec{S}$

5. Теорема Гаусса: $\int_S \vec{E} d\vec{S} = \dfrac{q}{\varepsilon_0}$

«Детали», знание которых проверяется в тестовых вопросах:

1. В формуле (1) $\vec{F}$ - сила, действующая на заряд q_1 со стороны q_2, а вектор $\vec{r}$ проведен от заряда q_1 к заряду q_2. Это следует иметь в виду, отвечая на вопросы.
2. В формуле (3) вектор $\vec{r}$ проведен от заряда q в «точку наблюдения», где определяется напряженность поля $\vec{E}$. Это следует иметь в виду, отвечая на вопросы.
3. Если поле однородное (не зависит от координат), а поверхность плоская, то выражение для потока упрощается: $\Phi = \int_S \vec{E} d\vec{S} = ES\cos\alpha$, где α - угол между вектором напряженности и нормалью к поверхности.
4. В соответствии с теоремой Гаусса поток вектора напряженности через замкнутую поверхность равен алгебраической сумме зарядов, которые охватываются этой поверхностью.
5. Принцип суперпозиции полей: векторы напряженности отдельных зарядов складываются векторно.

Далее следует изучить тестовые вопросы 1-7 из книги….

Типовые вопросы с ответами и комментариями.

Неподвижные точечные заряды q_1 и q_2 находятся в вакууме. Вектор $\vec{r}$ проведен от заряда q_1 к заряду q_2. Сила $\vec{F}$, действующая на заряд q_2 со стороны q_1, равна:

	А)	$\vec{F} = \dfrac{q_1 q_2 \vec{r}}{4\pi\varepsilon_0 r^3}$	Б)	$\vec{F} = -\dfrac{q_1 q_2 \vec{r}}{4\pi\varepsilon_0 r^3}$	В)	$\vec{F} = \dfrac{\lvert q_1\rvert \lvert q_2\rvert \vec{r}}{4\pi\varepsilon_0 r^3}$	Г)	$\vec{F} = \dfrac{\lvert q_1\rvert \lvert q_2\rvert \vec{r}}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$

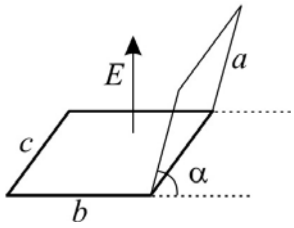
Точечный заряд q находится в плоскости XY в точке, положение которой определяется радиус-вектором $\vec{r} = a\vec{i} + b\vec{j}$, где $\vec{i}$, $\vec{j}$ - орты осей. Вектор напряженности электрического поля в начале координат равен:

А) $\vec{E} = \dfrac{q(a\vec{i} + b\vec{j})}{4\pi\varepsilon_0 (a^2 + b^2)^{3/2}}$;

Б) $\vec{E} = -\dfrac{q(a\vec{i} + b\vec{j})}{4\pi\varepsilon_0 (a^2 + b^2)^{3/2}}$;

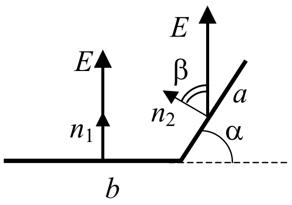
В) $\vec{E} = \dfrac{q(a\vec{i} + b\vec{j})}{4\pi\varepsilon_0 (a^2 + b^2)}$.

Ответ «Б». Точечный заряд q создает в точке A поле напряженностью $\vec{E} = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0} \dfrac{\vec{R}}{R^3}$, где $\vec{R}$ - вектор, проведенный *от заряда* q *в точку* A. В данном случае $\vec{R} = -\vec{r} = -(a\vec{i} + b\vec{j})$.



Найдите величину |Φ| потока однородного электрического поля $\vec{E}$ через поверхность, составленную из двух прямоугольников (рисунок), если известны величины a, b, c, α, E.

Ответ. Изобразим рисунок «в разрезе». Выбрав направление нормали, как показано на рисунке, и воспользовавшись определением потока вектора, запишем:

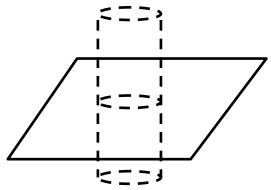


$$|\Phi| = Ebc\cos 0 + Eac\cos\beta .$$

Учитывая, что $\beta = \alpha$, найдем

$$|\Phi| = Ec(b + a\cos\alpha) .$$

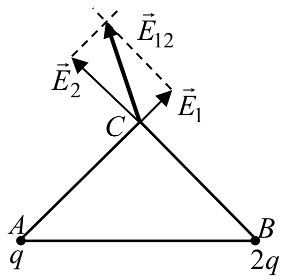
На рисунке изображен плоский лист бумаги P, по которому однородно распределен заряд Q, и воображаемая замкнутая поверхность в виде прямого цилиндра, перпендикулярного плоскости листа. Найдите поток вектора напряженности через эту замкнутую поверхность, если площадь листа S, радиус цилиндра R.



Ответ. По теореме Гаусса поток вектора напряженности через замкнутую поверхность равен $\Phi = q_{внутр}/\varepsilon_0$, где $q_{внутр}$ - заряд, который попадает внутрь замкнутой поверхности. В данном случае $q_{внутр}$ равен заряду круга радиусом R, который «вырезает» цилиндр в плоском листе. Так как лист заряжен однородно, то $\dfrac{q_{внутр}}{Q} = \dfrac{\pi R^2}{S}$. Следовательно, $\Phi = Q\pi R^2/\varepsilon_0 S$.

Точечные заряды q и $2q$ расположены в вершинах A и B прямоугольного равнобедренного треугольника ABC (C - вершина прямого угла). Во сколько раз уменьшится модуль вектора напряженности электрического поля в точке C, если заряд $2q$ убрать?

Ответ $\sqrt{5}$**.** Согласно принципу суперпозиции вектор напряженности поля в точке C, созданного зарядами q и $2q$, равен $\vec{E}_{12} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$, где $\vec{E}_1$ и $\vec{E}_2$ - векторы полей, созданные в точке C каждым из зарядов в отдельности. Учитывая, что $\vec{E}_1$ и $\vec{E}_2$ взаимно перпендикулярны (рисунок) и что $E_2 = |\vec{E}_2| = 2E_1$, найдем модуль вектора напряженности суммарного поля двух зарядов $E_{12} = \sqrt{E_1^2 + E_2^2} = \sqrt{5E_1^2} = E_1\sqrt{5}$. Если заряд $2q$ убрать, то в точке C поле станет равным $\vec{E}_1$ и, следовательно, величина напряженности поля уменьшится в $\sqrt{5}$ раз.



Имеются три неподвижных точечных заряда. В некоторой точке A первый и второй заряды создают электрическое поле суммарной напряженностью $\vec{E}_{12}$, первый и третий заряды создают в той же точке поле $\vec{E}_{13}$, а второй и третий - поле $\vec{E}_{23}$. Вектор напряженности $\vec{E}$ поля, созданного тремя зарядами в точке A, равен:

А) $\vec{E} = \vec{E}_{12} + \vec{E}_{13} + \vec{E}_{23}$;

Б) $\vec{E} = \left(\vec{E}_{12} + \vec{E}_{13} + \vec{E}_{23}\right)/2$;

В) $\vec{E} = \left(\vec{E}_{12} + \vec{E}_{13} + \vec{E}_{23}\right)/3$;

Г) для ответа на вопрос не достаточно данных.

Ответ «Б». Пусть $\vec{E}_1$, $\vec{E}_2$ и $\vec{E}_3$ - напряженности полей, которые создают в точке A каждый из зарядов в отдельности. Тогда в соответствии с принципом суперпозиции

$$\vec{E}_{12} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2\,,\quad \vec{E}_{13} = \vec{E}_1 + \vec{E}_3\,,\quad \vec{E}_{23} = \vec{E}_2 + \vec{E}_3\,.$$

Складывая эти поля, получаем

$$\vec{E}_{12} + \vec{E}_{13} + \vec{E}_{23} = 2\left(\vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \vec{E}_3\right) = 2\vec{E}\,.$$

6.